Lina do Carmo Teixeira Moniz

Relatório de Estágio

Lisboa

2010

Universidade Nova de Lisboa

Faculdade de Ciências e Tecnologia

Departamento de Matemática

Relatório de Estágio

Lina do Carmo Teixeira Moniz

Dissertação apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa para obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico e do Secundário.

Orientador: Professor Doutor António Domingos

Co-Orientadora: Dr.ª Lourdes Ventura Fernandes

Lisboa

2010

À Catarina e ao Patrício

Agradecimentos

Agradeço a todas as pessoas e instituições que contribuíram para a realização deste relatório, em especial:

À Professora Doutora Maria Helena Santos e ao Professor Doutor Filipe José Marques, responsáveis científicos do meu estágio profissional, pelos comentários enriquecedores, pelas sugestões e questionamentos pertinentes, pelo cuidado e atenção colocado na formação de profissionais competentes, em suma pela orientação científica prestada ao longo do estágio pedagógico.

Ao Professor Doutor António Domingos, meu orientador no trabalho de investigação, pela disponibilidade manifestada para acompanhar o trabalho, nomeadamente no que se refere à orientação científica e metodológica, à leitura, aos questionamentos e sugestões apresentadas e ao incentivo e apoio prestado ao longo das suas várias fases.

À Professora Lourdes Ventura, minha orientadora do estágio pedagógico e com quem muito aprendi, pelos ensinamentos, sugestões e críticas, pela disponibilidade, empenho e profissionalismo com que colaborou na minha formação de docente e muito especialmente por todo o seu estímulo, encorajamento e amizade.

Aos alunos da turma, pela forma como me acolheram nas aulas e em especial à Cristiana, à Rita e ao João pela disponibilidade, simpatia, carinho e entusiasmo com que colaboraram em todos os momentos do trabalho de investigação.

À Escola Secundária, pela forma acolhedora com que fui integrada no seu quotidiano e pela disponibilização dos meios necessários à realização do estágio pedagógico.

Sumário

O presente trabalho pretende ilustrar as dimensões exploradas no estágio pedagógico de Lina Moniz, integrado no Mestrado em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa e que decorreu na Escola Secundária Fernando Lopes-Graça, no ano lectivo 2008/2009. Este trabalho resulta da compilação de dois documentos distintos: Relatório de Actividades (Parte I) e Trabalho de Investigação (parte II).

O Relatório de Actividades encerra, de forma pormenorizada, todas as dimensões desenvolvidas no estágio, relacionadas com a prática pedagógica supervisionada, nomeadamente, a intervenção e dinamização de actividades pedagógicas, didácticas e lúdicas. Neste documento, com um forte cariz reflexivo, é ainda dada particular atenção à observação das dinâmicas pedagógica e social inerentes ao contexto escolar.

O Trabalho de Investigação pretende analisar os processos de ensino-aprendizagem do conceito derivada. Resulta de uma investigação desenvolvida junto de três alunos da turma de leccionação, com diferentes perfis, segundo uma metodologia de natureza qualitativa, integrando uma componente de experiência de ensino e tendo como principal objectivo a análise crítica e reflexiva da eficácia das estratégias de ensino implementadas. A recolha de dados baseou-se na análise de documentos, na observação e, sobretudo, na realização de entrevistas. A análise das aprendizagens desenvolvidas pelos alunos revelou uma razoável presença dos conceitos matemáticos explorados, contudo expôs igualmente algumas fragilidades não só ao nível científico como ao nível da motivação e do empenho pessoal dos alunos.

Abstract

The present work aims to illustrate the dimensions explored in the teaching practice of Lina Moniz, integrated in Masters in Mathematics Education, Faculty of Science and Technology, New University of Lisbon, which took place in the High School Fernando Lopes-Graça, in the academic year 2008/2009. This work is a compilation of two separate documents: Report of Activities (Part I) and Research Work (Part II).

The Report of Activities contains, in detail, all dimensions developed in the practice, relating to supervised teaching practice, namely intervention and promotion of all educational activities. In this document, with a strong reflective component, it is still giving particular attention to the observation of educational and social dynamics inherent to school context.

The Research Work aims to analyze the processes of teaching and learning of the derivative concept. Results of an investigation performed with three students of the teaching class, with different profiles, according to a qualitative methodology, integrating a component of teaching experience and whose main objective is the critical and reflective analysis of the effectiveness of implemented teaching strategies. Data collection was based on document analysis, observation, and especially in interviews. The analysis of students' learning, revealed a reasonable presence of explored mathematical concepts, however also exposed some weaknesses not only at scientific level but also at levels of motivation and personal commitment of students.

Índice de Matérias

Parte I

Relatório de Actividades

Índice Parte I – Relatório de Actividades

Índice de Figuras

Parte I – Relatório de Actividades

1. Introdução

O presente documento pretende ilustrar as dimensões exploradas no estágio pedagógico realizado por mim, Lina Moniz, integrado no Mestrado em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa (FCT-UNL). O estágio decorreu na Escola Secundária Fernando Lopes-Graça, Parede, durante o ano lectivo de 2008/2009. O núcleo de estágio foi constituído por apenas dois elementos, a orientadora Lourdes Ventura e eu como estagiária. Ao longo do estágio, observei e leccionei numa das turmas da orientadora, mais concretamente numa turma de Matemática A do 11º ano de escolaridade. A qualidade pedagógica e científica do estágio foi assegurada pelo acompanhamento e supervisão de dois responsáveis científicos da FCT-UNL, professora Doutora Maria Helena Santos e professor Doutor Filipe José Marques.

Os estágios pedagógicos da FCT-UNL têm como objectivo colaborar na formação de docentes de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e do ensino Secundário, de acordo com características definidas no documento *Perfil de desempenho profissional específico dos docentes de Matemática do 3º Ciclo do Ensino Básico e do Ensino Secundário* da autoria desta faculdade. Foi de acordo com as directrizes aí estabelecidas que procurei desenvolver o meu trabalho na escola, ao longo do ano lectivo, em todas as actividades e momentos pedagógicos que planeei, desenvolvi e em que participei e, como tal, julgo pertinente passar a expô-las em breves traços.

Segundo o documento, o perfil de desempenho profissional destes docentes organiza-se em torno de duas vertentes: a *matemática* e o *ensino e a aprendizagem da matemática*. Na componente da ***matemática*** privilegia-se a forte formação a nível superior e a elevada visão sobre a actividade matemática. Assim, defende-se que o professor de matemática deve ser, simultaneamente, um profissional com uma visão clara sobre a natureza, a história, os princípios, as técnicas e os métodos desta disciplina científica, assim como deve ser possuidor de uma aprofundada compreensão dos conteúdos que vai ensinar. Segundo o documento, é também fundamental que o professor de matemática possua uma forte compreensão da relevância desta disciplina no mundo contemporâneo. Com efeito, defende-se que a Matemática, pela sua presença na vida quotidiana, constitui uma peça fundamental não só para o desenvolvimento de um vasto leque de actividades profissionais, como para o exercício de uma cidadania plena.

Por seu turno, no que se refere ao ***ensino e aprendizagem***, o documento estabelece que os docentes de Matemática formados pela FCT-UNL, ao planificarem e desenvolverem os seus métodos, conteúdos e contextos de ensino, devem empenhar-se em integrar "o saber matemático com os saberes e técnicas educativas mais adaptados a um ensino de matemática de qualidade". Neste sentido, defende-se que o professor de matemática deve saber proporcionar ambientes de aprendizagem ricos e diversificados, assim como deve ser igualmente capaz de propor e dinamizar actividades matemáticas significativas, tanto do ponto de vista do saber matemático, como do ponto de vista dos seus alunos, por forma a envolvê-los em colaborações activas. Adicionalmente, o professor de matemática deve compreender que todos os alunos, independentemente das suas características e percursos pessoais, sociais ou escolares, têm o direito de estudar uma matemática de qualidade. O desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos conseguido, por exemplo, através de estímulos para a investigação, para a exploração e descoberta de padrões e propriedades, ou através da formulação e resolução de problemas e do questionamento das suas conclusões, é outra das importantes características dos docentes de matemática enfatizadas pela FCT-UNL. Paralelamente a estas características e assumindo-se como um veículo privilegiado para a potenciação de cada uma delas, surge o incentivo ao recurso às tecnologias. Como se pode ler no documento, "o recurso a ambientes computacionais gráficos e de geometria dinâmica levam à criação de ambientes de aprendizagem ricos, à realização de actividades matemáticas significativas, ao desenvolvimento de um pensamento matemático criativo e à descoberta de uma matemática de qualidade por todos os alunos envolvidos nestes ambientes". No documento é ainda referida a desejável participação dos docentes em actividades de divulgação da Matemática.

Com o presente relatório pretendo expor e descrever o trabalho por mim realizado no decurso do estágio pedagógico que, pretendi, incluísse o conjunto das dimensões descritas. O relatório encontra-se organizado da seguinte forma. Nos pontos 3 e 4 são apresentados, em breves traços, a escola, a turma de leccionação e o núcleo de estágio. Esta contextualização assume um importante papel na compreensão das opções e das orientações assumidas ao longo do estágio. O ponto 5 é dedicado à observação efectuada por mim, relativamente ao trabalho desenvolvido pela orientadora nas suas diversas vertentes: actividade lectiva; gestão da sala de aula; relação e participação no desenvolvimento pessoal, social e académico dos alunos; relação com os colegas; e dinamização e participação na vida escolar. O resumo e a respectiva calendarização das actividades pedagógico/didácticas por mim directamente concebidas, planificadas e dinamizadas, encontram-se no ponto 6, enquanto o correspondente desenvolvimento, análise e reflexão crítica constituem o objecto dos dois pontos seguintes, nomeadamente, o ponto 7 relativo à prática pedagógica propriamente dita e o ponto 8 no qual abordo as actividades não lectivas dinamizadas. Os conteúdos destes últimos pontos assumem-se como uma parte fulcral do relatório de actividades. Com efeito, é ao longo destes dois pontos que exploro, reflicto e que me questiono sobre a essência da prática educativa e da actividade docente, procurando sintetizar e assimilar as dúvidas, as experiências e os conhecimentos adquiridos ao longo do ano lectivo. É com base nestes conteúdos que me proponho prosseguir, ao longo da minha futura acção docente, no caminho do questionamento e da procura contínua de melhores e mais adequadas práticas educativas.

Parte integrante deste relatório é o dossiê de estágio. O dossiê contém todos os recursos e trabalhos produzidos ao longo do estágio: planificações de aulas, fichas de trabalho e respectivas soluções/resoluções, fichas para acções desenvolvidas com recurso a tecnologias, fichas informativas, materiais de apoio às actividades desenvolvidas, exercícios para testes de avaliação sumativa por mim elaborados e ainda conteúdos de divulgação matemática. O dossiê encontra-se organizado por ordem cronológica das minhas actividades e intervenções ao longo do estágio, de acordo com a calendarização apresentada no ponto 6, e o seu conteúdo constitui um testemunho fundamental e representativo das minhas orientações e intenções pedagógico/didácticas. A leitura dos pontos 7 e 8 deverá ser realizada em paralelo com a consulta do material presente no dossiê de estágio.

Os dois penúltimos pontos do relatório são dedicados à minha participação na vida escolar, nomeadamente à participação em reuniões relativas à turma em que leccionei e à participação em actividades da escola dinamizadas por outros docentes. O relatório de actividades é finalizado com as conclusões e algumas reflexões finais. Julguei ainda pertinente incluir no relatório um ponto inicial no qual apresento algumas das ideias e expectativas que possuía ao iniciar o estágio pedagógico. Creio que este tópico pode ser muito útil para a identificação da diversidade de conhecimentos e dimensões explorados no estágio e que muito contribuíram para o meu enriquecimento e consciência profissional.

2. A iniciar o estágio: ideias e expectativas

Após a realização de uma licenciatura no final dos anos noventa do século passado e a concretização de alguma experiência profissional, tanto em ambientes empresariais e de investigação, como em contexto de ensino (ensino universitário e particular), decidi abraçar um projecto que me é muito caro, comprometendo-me com o Mestrado em Ensino de Matemática da FCT-UNL. Com efeito, a minha grande satisfação e realização pessoal com a actividade pedagógica, levou a decidir-me inequivocamente pela orientação da minha carreira profissional nesta direcção. Assim, e ao preparar-me para iniciar o estágio pedagógico, sentia já algumas certezas, mas também, e inevitavelmente, algumas dúvidas e receios.

Uma das minhas primeiras preocupações, certamente muito influenciada por algumas notícias relativas a problemas de indisciplina, frequentemente tornadas públicas pelos meios de comunicação social, incidia sobre o modo de enfrentar os alunos. Com efeito, e se por um lado, já sentia alguma segurança relativamente a situações de expressão em público, pela minha experiência activa prévia de participação em reuniões, aulas e conferências, por outro, temia as eventuais dificuldades geradas por um público jovem e porventura indisciplinado.

Paralelamente a esta questão e num plano mais pedagógico, outras três preocupações mereciam igualmente a minha atenção, como sejam:

1) o cuidado com o rigor pedagógico/científico das minhas intervenções. Por ser uma pessoa que privilegia a correcção a todos os níveis de actuação, não só a nível profissional, como também pessoal e ético, possuía, ao partir para o estágio pedagógico, uma verdadeira preocupação em conseguir e manter em todos os momentos esse rigor;
2) o proporcionar, aos alunos, actividades ricas e motivadoras. Tendo muito prazer em trabalhar com a Matemática, sinto ainda uma maior satisfação quando me é possível partilhar com os alunos um pouco desse prazer. Assim, uma das minhas preocupações constantes é conseguir alcançar um espírito criativo, que me permita propor actividades pertinentes e desafiantes, que envolvam os alunos, os motivem, lhes proporcionem prazer e, em última análise, que contribuam para o seu crescimento na Matemática;
3) o conseguir contribuir de forma real e concreta para a aprendizagem dos alunos. Na dialéctica ensino/aprendizagem, não me satisfaço plenamente com a simples compreensão de um conteúdo e a respectiva aplicação em condições semelhantes. Para

mim, aprender matemática implica, entre outras coisas, aprender a pensar e a utilizar as ferramentas e conhecimentos adquiridos em contextos diferentes dos originais, assim como aprender a discernir sobre os recursos mais adequados a cada situação. É com o sentido nesta missão que gosto de me posicionar no ensino.

Estas três preocupações que resumiam, ao iniciar o estágio, a minha forma de encarar o trabalho didáctico de um professor e que me têm acompanhado em todas as minhas incursões pelo ensino, exigem um cuidado constante e persistente e, por isso, esforço-me e preocupo-me em mantê-las sempre na primeira linha das minhas intenções. Ao iniciar o estágio, cuidava para não descurar nenhuma delas.

No que concerne ao relacionamento com os alunos, devo confessar que, inicialmente, possuía uma certa atitude de distanciamento face à sua evolução escolar, atribuindo à sua própria responsabilização um papel fundamental no processo. Efectivamente, e fruto de certa experiência profissional de exigência e de assunção dos actos praticados, fui adquirindo, ao longo dos tempos, uma postura de independência e de respeito pelas opções pessoais de outrem. Esta atitude de independência não significa, de modo algum, que não tente transmitir as minhas opiniões e orientações, por vezes, fazendo-o mesmo de forma veemente, significa apenas que, normalmente, escolho não interferir no momento da decisão final. Com esta postura, tento transmitir às pessoas em causa uma atitude de independência e responsabilização pelos seus próprios actos. No entanto, e como explorarei em vários momentos do relatório, ao longo do estágio pedagógico fui adquirindo uma diferente consciência relativamente a este assunto. Com efeito, e uma vez que um professor que lecciona nestes níveis de escolaridade é também, e inquestionavelmente, um educador, ele possui necessariamente um papel mais interventivo e fundamental no desenvolvimento dos seus alunos. Um papel em todos os níveis de construção da sua maturidade, não apenas na sua aquisição de conhecimentos e de competências científicas, mas também numa dimensão pessoal, social e afectiva.

Por fim, devo ainda referir, uma certa expectativa que mantinha relativamente ao funcionamento interno da escola. Este factor não constituía um receio, mas sim um desejo de apreender *in loco* nomeadamente as formas de organização da escola, o seu ambiente e as relações entre os professores.

3. Escola e turma de leccionação

O meu estágio pedagógico decorreu na Escola Secundária Fernando Lopes Graça na freguesia da Parede, Concelho de Cascais, Distrito de Lisboa, onde leccionei numa das turmas da orientadora, uma turma do 11º ano de escolaridade de Matemática A.

A Escola Secundária Fernando Lopes Graça é uma escola de média dimensão, que possui um ambiente muito tranquilo e acolhedor. Verifica-se um bom relacionamento entre professores, alunos e funcionários. Ao entrarmos na escola, tem-se, desde logo, a sensação de se estar perante uma grande família. Na Escola Secundária Fernando Lopes Graça as pessoas têm um nome, uma história e são acarinhadas e acompanhadas nos seus sucessos e nas suas dificuldades. Como confessei, antes de iniciar o estágio possuía um grande receio de vir a enfrentar um ambiente indisciplinado e hostil, mas foi exactamente o oposto que encontrei. Fui muito bem acolhida por todos, quer pelos funcionários, colegas e elementos do Conselho Executivo da escola, quer, sobretudo, pela minha orientadora e pelos alunos com os quais trabalhei. O ambiente que encontrei na Escola Secundária Fernando Lopes Graça, acolhedor e movido em função do melhor interesse dos percursos académicos dos alunos, constituiu, sem dúvida, um elemento estabilizador do meu estágio pedagógico e um importante modelo a reproduzir em oportunidades futuras.

Leccionei numa turma inicialmente composta por 15 elementos, seis rapazes e nove raparigas, que, no geral, mantinha a mesma constituição desde o 10º ano de escolaridade. A docente, Lourdes Ventura, era simultaneamente professora de Matemática e directora de turma, assim como também ocorrera no ano lectivo anterior.

Ao assistir às primeiras aulas fiquei agradavelmente surpreendida com a participação dos alunos, ainda que esta ocorresse quase sempre em resposta às solicitações da docente. Na sua generalidade, os alunos mostravam razoáveis conhecimentos matemáticos, recordando-se muito frequentemente de conteúdos e procedimentos trabalhados no ano anterior, inclusivamente de determinados pormenores de excepção e das respectivas razões de existência. No entanto, com o passar das aulas e o avolumar da matéria, foram ficando cada vez mais claras algumas das suas fragilidades. Com efeito, apesar de se verificar uma compreensão dos conteúdos no momento em que estes eram trabalhados, a maioria dos alunos denotava uma certa falta de trabalho extra-aula essencial à sua consolidação. Adicionalmente, demonstravam frequentemente alguma ausência de iniciativa e de destreza na realização das tarefas propostas. Verificavam-se regularmente momentos de uma certa apatia colectiva. A proposta e dinamização de tarefas diversificadas e desafiantes, nomeadamente tarefas com recurso a tecnologias de informação, era bem recebida na turma, provocando um maior interesse e elevando a dinâmica da sala de aula.

Creio que posso considerar o nível médio de aproveitamento da turma como médio fraco. É de destacar, no entanto, a existência de cerca de três alunos com um aproveitamento bom ou muito bom e de dois alunos que, apesar não o reflectirem no aproveitamento, possuíam um bom nível de raciocínio matemático. Um destes últimos apresentava mesmo problemas de assiduidade e de falta de motivação, tendo acabado por abandonar a escola a meados do segundo período, apesar dos muitos esforços da directora de turma, assim como dos meus, num acompanhamento mais individualizado que lhe prestei sala de aula[1].

Do ponto de vista do comportamento, os alunos eram cordiais e afáveis. Pontualmente verificavam-se algumas atitudes ligeiramente desadequadas, mas que eram rapidamente ultrapassadas, pela eficaz intervenção da docente.

[1] Para uma descrição da organização quotidiana da sala de aula ver o ponto 5, “Observação do trabalho da orientadora”

4. *Núcleo de estágio*

O núcleo de estágio foi constituído apenas por mim, estagiária, e pela orientadora Lourdes Ventura.

Desde o início, a orientadora estimulou a existência de um ambiente muito cordial e aprazível, propício ao diálogo e à troca de ideias. Quando na reunião inicial, se manifestou no sentido de me colocar “à vontade” para intervir oportunamente nas aulas a que assistiria, através de comentários e sugestões, julguei, confesso, que o fazia mais por cortesia e não com a firme intenção de que tal ocorresse efectiva e regularmente. Dei por mim a pensar “sim, intervirei em alguma situação esporádica”. Todavia, o ambiente construído na sala de aula era, com efeito, um ambiente pautado pela reflexão e construção matemática, que favorecia as intervenções pertinentes, sempre que estas se revelavam no melhor interesse da aprendizagem dos alunos. E este ambiente de participação e diálogo ocorreu em ambos os sentidos e nas diversas situações pedagógicos: em aulas leccionadas pela orientadora e assistidas por mim; em aulas leccionadas por mim e assistidas pela orientadora; ou ainda em aulas em que tanto a orientadora como a estagiária se deslocavam pela sala, auxiliando os alunos nas suas dúvidas, o que ocorria sobretudo em aulas dedicadas à prática e à consolidação dos conteúdos trabalhados e/ou a actividades/explorações com recurso a tecnologias.

A exemplo do que ocorreu na sala de aula, o núcleo de estágio trabalhou sempre de uma forma cooperante e harmoniosa, pautada pelo respeito e pela franqueza. De destacar os momentos de trabalho e de discussão sobre a pertinência científica e pedagógica das aulas planificadas e dos materiais educativos desenvolvidos, os momentos de reflexão sobre as práticas, a gestão de sala de aula e a interacção com os alunos e, igualmente e não menos importantes, os momentos de diálogo e de partilha de experiências pessoais. A colaboração com os colegas e a participação na vida da escola foram igualmente duas dimensões particularmente sublinhadas no âmbito do trabalho colaborativo desenvolvido.

A docente Lourdes Ventura possuiu em todos os momentos uma atitude atenta, orientadora e de rigor, mostrando-se sempre empenhada e disponível para responder às minhas solicitações, ora manifestando o seu assentimento, ora levantando questões e desafiando-me para a implementação de novas estratégias. Da minha parte, tentei igualmente corresponder com a mesma dedicação e rigor, esforçando-me para aprender e adquirir novos saberes e sensibilidades, sempre com o sentido de melhorar a minha actuação como docente. O à-vontade e o clima cordial que a orientadora soube imprimir ao trabalho conjunto, fez-me frequentemente sentir que conversava e trocava ideias com uma colega, embora com uma colega possuidora de uma vasta experiência e com amplos ensinamentos para transmitir.

Em suma, e relativamente ao trabalho empreendido pelo núcleo de estágio, é com alguma satisfação que arrisco afirmar possuir dificuldades em realçar algum momento menos conseguido ou algum aspecto a melhorar. Este trabalho constituiu, na minha opinião, um bom exemplo do que deve consistir um trabalho colaborativo entre docentes da mesma área pedagógica. Um modelo a perpetuar no decurso da minha futura carreira docente.

5. *Observação do trabalho da orientadora*

No meu ponto de vista a componente de observação do trabalho realizado pelo orientador num estágio pedagógico de um mestrado em ensino, assume um papel fundamental e relevante no processo de aprendizagem e de desenvolvimento dos novos profissionais educativos. É sabido que o ser humano se desenvolve e organiza, ao longo da sua vida, com base nos modelos que o rodeiam, interpelando-os, assimilando-os e reproduzindo-os com maior ou menor intensidade. Deste modo, a oportunidade de realizar uma observação consciente, inquiridora e geradora de sólidas ferramentas e padrões educativos, constitui um dos factores primordiais na construção da essência dos futuros educadores.

Foi com esta consciência que iniciei o estágio e foi com base nela que tentei pautar a minha observação relativa à actuação da orientadora. Devo, no entanto, confessar que, inicialmente, não possuía uma ideia tão clara quer da relevância desta observação, quer das suas múltiplas dimensões. Com efeito, a minha atenção detinha-se apenas, e sobretudo, em aspectos relativos ao trabalho lectivo e à gestão da sala de aula, não contemplando áreas igualmente fundamentais como o envolvimento e a participação no desenvolvimento integral dos alunos, a relação com os colegas e a participação activa na vida escolar. Ao longo do estágio, todas estas dimensões foram sendo progressivamente reveladas e/ou clarificadas.

Antes ainda de iniciar o relato das minhas observações e reflexões, julgo ser de alguma utilidade apresentar, neste momento, uma breve descrição da **organização quotidiana da sala de aula**, uma vez que ela determinou, de alguma forma, o modo como as respectivas observações foram efectuadas. Assim, e quando as aulas possuíam uma componente mais expositiva, a presença de uma docente extra na sala era aproveitada para prestar um apoio mais individualizado a algum aluno que apresentasse maiores dificuldades. A docente sentava-se por entre os alunos, prestando-lhes um maior auxílio e participando activamente e oportunamente na aula, quando isso se revelava no melhor interesse da aprendizagem dos alunos. E este procedimento ocorria em qualquer das situações lectivas, quer em aulas leccionadas pela orientadora, quer em aulas leccionadas por mim. Por outro lado, e como já referi anteriormente, quando as aulas possuíam um carácter mais explorativo ou prático (com recurso ou não a equipamentos computacionais), as duas docentes circulavam igualmente pela sala, auxiliando os alunos nas suas dúvidas e orientando o seu trabalho, trocando impressões sobre dificuldades frequentes e, se necessário, chamando a atenção geral da turma para esclarecer dúvidas comuns. Desta forma, o meu processo de recolha de observações ocorreu num ambiente de participação activa. Se por um lado, este facto poderá ter condicionado de alguma forma a minha recolha de informação, por outro, constituiu, no meu entender, uma grande mais-valia no processo de aprendizagem do que é ser docente de Matemática.

Seguidamente exporei o resultado das minhas observações, que abarcam várias dimensões: actividade lectiva; gestão de sala de aula; participação no desenvolvimento integral dos alunos; relação com os colegas; e participação na vida escolar. Apesar de os enumerar e de os passar a especificar em separado, no meu entender, todos estes níveis de actuação devem ser encarados como indissociáveis e igualmente fundamentais para a concretização de um objectivo único: a formação de indivíduos pessoalmente realizados e socialmente válidos.

No que concerne à actividade lectiva, gostaria de sublinhar o extremo cuidado e rigor científico com que a orientadora trabalhou os conteúdos matemáticos na sala de aula. Nenhum pormenor foi esquecido, nenhuma excepção deixada de ser explorada. Mesmo os alunos com classificação média recordavam-se frequentemente, e com algum detalhe, dos contornos dos conceitos abordados, inclusive dos abordados no ano lectivo anterior[2].

Relativamente à componente lectiva, gostaria de deixar aqui o testemunho de algumas situações/estratégias que muito apreciei e retive:

- Inicio da exploração de novos conteúdos por uma revisão de conceitos associados, já explorados em ocasiões anteriores, sendo os próprios alunos a relembrar e a construir, com a orientação do professor, esses mesmos conceitos[3].
- Diversificação de estratégias de resolução de exercícios na sala de aula, de acordo com diferentes objectivos e estágios de desenvolvimento de conceitos: o docente a resolver o exercício no quadro como apoio dos alunos; o docente a permitir algum

[2] Nos momentos em que verificava esta realidade, recordava-me frequentemente de uma velha discussão, em que alguns docentes ocasionalmente se envolvem, no que concerne à decisão de exploração de determinados conteúdos mais específicos ou formais, em função das dificuldades que os alunos apresentam, e retinha um pensamento para mim própria: “Não há dúvidas, o rigor compensa sempre!”.

[3] Por exemplo, ao dar início o estudo das funções a docente solicitou aos alunos que expressassem todos os conteúdos do 10º ano que recordavam, alusivos a esse estudo, tendo estes referido, por entre outros conteúdos, a monotonia, a paridade, a determinação dos zeros. Num outro exemplo, ao retomar o estudo das derivadas na semana seguinte ao seu início, a docente desafiou uma aluna com: “L., quer recordar o que andámos a estudar na semana passada?”.

tempo para os alunos os resolverem individualmente, posteriormente discutindo os resultados na turma; a solicitação da sua resolução no quadro, por um ou mais alunos (no caso da resolução de diversas alíneas de cálculo, por exemplo); ou ainda a resolução de exercícios pelos alunos organizados em grupos, com os docentes a circular pela sala, auxiliando-os.

- Solicitação da ajuda dos alunos para a explanação da resolução de exercícios aos colegas, pelas suas próprias palavras. Este procedimento ocorreu tanto em situações individuais na sala de aula, como em situações de grupo (internamente ou externamente ao grupo de trabalho), promovendo deste modo a comunicação matemática e tentando fomentar o diálogo inter-pares.
- Repetição pontual e estratégica de algumas perguntas, de forma a promover a consolidação de determinados conceitos e/ou resultados, induzindo deste modo a produção de respostas progressivamente mais afirmativas por parte dos alunos.

Ainda neste domínio, a orientadora preocupou-se sempre em apresentar estratégias diversificadas e motivadoras, quer recorrendo a actividades e investigações com o recurso ao computador, tentando assim criar ambientes de aprendizagem dinâmicos e desafiantes, quer elaborando material destinado a explorar diferentes aspectos da aprendizagem: fichas de apoio à aula para apoio aos alunos na construção de novos conceitos; fichas de consolidação de conceitos; fichas de recuperação para auxiliar os alunos nos conteúdos em que apresentavam maiores dificuldades; fichas de revisões globais; e fichas informativas. A docente apresentava, assim, um elevado cuidado em atender às especificidades e dificuldades de todos os elementos da turma, sempre tendo em linha de conta as capacidades e competências a desenvolver.

Uma das preocupações mais assinaláveis da docente Lourdes Ventura era exactamente a atenção que dedicava a todos e a cada um dos seus alunos. Os alunos mais reservados, mais apáticos, os que se posicionam na sala nos lugares mais discretos, eram alunos a quem, por exemplo, prestava um particular cuidado. A orientadora trabalhou sempre, e na medida do possível, para que nenhum aluno corresse o risco de se isolar da dinâmica da sala de aula e dos conteúdos aí explorados. Neste capítulo, as suas estratégias constituíram para mim uma grande referência. A título exemplificativo, gostaria de distinguir algumas delas: o questionamento sequencial de todos os alunos da turma sobre determinado tema; a resposta às dúvidas e intervenções menos correctas dos alunos, com expressões sempre construtivas e motivadoras como “Essa é uma dúvida pertinente", "Vamos analisar esta questão", ou ainda com um suave "Que coisa disparatada!"; a não valorização individual e excessiva das respostas incorrectas, abordando e explorando posteriormente o respectivo conteúdo em grupo alargado, na turma, por forma a não desmotivar em demasia os alunos envolvidos; a utilização de expressões ou provérbios populares portadores de uma mensagem clara, incisiva e potenciadora de cumplicidades e de sentimentos de pertença ao grupo, como "vamos lá dar corda aos sapatos" ou "não queremos fazer matemática como burrinho pelo carreiro"; ou ainda a motivação da resposta dos alunos a determinada solicitação com expressões encorajantes como por exemplo "Ajude L., vá lá".

No domínio do relacionamento com os alunos, a orientadora constituiu realmente um grande exemplo na minha formação, mantendo com estes, em todas as ocasiões uma relação de grande proximidade. A orientadora manteve-se permanentemente atenta a qualquer sinal de mal-estar individual ou colectivo, intervindo prontamente através de diálogos abertos, francos e isentos, prevenindo, assim, a montante, possíveis processos de discriminação ou exclusão.

A orientadora participou sempre muito activamente no desenvolvimento integral dos alunos, tentando transmitir-lhes importantes valores e boas regras de comportamento pessoal e social. A nível do desenvolvimento escolar, a orientadora valorizou sempre o conhecimento e a responsabilidade nos próprios alunos na sua aquisição. Face, por exemplo, aos resultados menos conseguidos na disciplina de Matemática, e não só, no final do primeiro período, a docente desafiou os alunos a reflectirem e a apresentarem propostas concretas para a resolução das situações que, na sua opinião, tinham sido menos conseguidas[4]. A nível da orientação educativa dos alunos, promoveu dois momentos importantes, uma reunião com a Psicóloga do Serviço de Psicologia e Orientação e um encontro com antigos alunos da escola, no momento a frequentar o ensino superior.

Como resultado desta excelente relação pedagógica mantida pela orientadora com os alunos, uma relação assente na abertura, mas também no equilíbrio e no rigor, a gestão de sala de aula revelou-se com um carácter algo pacífico. Componentes como a disciplina, a pontualidade e a assiduidade foram sempre muito valorizados e transmitidos aos alunos. Qualquer situação menos adequada era prontamente assinalada pela docente e corrigida pelos seus actores. Face a todo o trabalho de fundo, que acabei

[4] Infelizmente, e porventura fruto de uma certa apatia verificada na turma, já por mim referida, não se verificou nenhuma resposta a este apelo.

de descrever, os alunos revelavam um elevado nível de interiorização de valores e denotavam um comportamento muito adequado e saudável na sala de aula.

No que concerne à relação com os colegas e à participação na vida escolar, duas dimensões para as quais, já o confessei, não me encontrava inicialmente tão motivada, a orientadora assumiu, mais uma vez, um papel de referência, através de componentes como:

- Colaboração e diálogo com colegas da mesma área científica em várias dimensões, como na dimensão metodológica, na dimensão de partilha de informação e de recursos didácticos, na dimensão de construção de elementos de avaliação, ou ainda na dimensão de discussão de questões teórico/conceptuais.
- Dinamização do Laboratório de Matemática, quer através da iniciativa individual, quer através da colaboração com colegas de Departamento, contribuindo assim para o desenvolvimento e promoção de materiais e actividades potenciadores de abordagens intuitivas e experimentais da Matemática.
- Dinamização e participação em visitas de estudo.
- Colaboração com colegas de diferentes áreas científicas, quer pela troca de experiências, quer pelo apoio em utilização de material informático (utilização do quadro interactivo, por exemplo), entre outros, sempre no melhor interesse da aprendizagem dos alunos.
- Participação pró-activa nas reuniões de Conselho de Turma, estimulando continuamente um bom ambiente de trabalho professor-professor e professor-alunos e procurando solucionar de forma eficaz os problemas ou potenciais problemas de natureza pedagógica e disciplinar da turma.
- Preocupação contínua em cooperar com os pais e encarregados de educação, na formação integral dos alunos, valorizando fortemente a dimensão pessoal e familiar do aluno.
- Atenção a diversas situações problemáticas envolvendo alunos da escola, mesmo aos quais não leccionava, disponibilizando-se para ajudar na procura de soluções, tanto no meio escolar, como na esfera social envolvente.
- Preocupação em contribuir para um ambiente escolar pautado pelos valores de educação e boa convivência social, promovendo, desta forma, um quadro propiciador do saudável desenvolvimento educacional e pessoal dos alunos.

Por fim, não poderia deixar de dedicar algumas palavras à forma como senti o trabalho da orientadora no que diz respeito à minha própria orientação. A docente Lourdes Ventura possuiu em todos os momentos uma preocupação constante com a minha formação, ou seja, com a formação de uma futura docente de matemática. Quer pelo seu próprio exemplo, quer através de comunicação directa, a orientadora sempre transmitiu valores de rigor, de humildade e de gosto pelo ensino e de atenção pelos alunos.

Em suma, estes constituíram os ensinamentos da orientadora que mais retive ao longo do estágio pedagógico, os ensinamentos que julguei mais importantes, os que mais me fizeram sentido e os que mais tenciono aplicar ao longo da minha própria futura carreira docente.

6. *Actividades desenvolvidas: resumo e calendarização*

O trabalho por mim realizado no decurso do estágio pedagógico consistiu sobretudo em:

a) planificação e leccionação de aulas, incluindo a concepção e desenvolvimento do respectivo material de apoio; fichas de trabalho e/ou de exploração e outro material didáctico auxiliar;

b) concepção e dinamização de actividades lúdico/pedagógicas;

c) dinamização de uma sala de estudo para apoio pedagógico adicional aos alunos da turma;

d) participação no trabalho relativo aos testes de avaliação sumativa, pela concepção de alguns exercícios e pela participação na sua correcção e classificação;

e) participação e apoio na direcção de turma e nas reuniões a ela respeitantes;

f) participação e apoio em actividades dinamizadas pela escola.

Todas estas componentes de participação e de trabalho directamente desenvolvido por mim, são exploradas nos restantes itens do relatório conforme resumido no ponto 1 "Introdução".

Na figura 6.1 é apresentado um calendário relativo ao ano lectivo do estágio pedagógico (2008/2009), no qual se encontram indicadas os principais momentos da minha actividade pedagógico/didáctica. Este calendário pretende constituir uma ferramenta de auxílio ao leitor no acompanhamento do relatório, nomeadamente no que concerne à localização temporal de algumas acções especificamente datáveis (acções relativas às alíneas *a*, *b* e *f*).

As actividades referidas nas alíneas *c*, *d* e *e* (a prestação de apoio pedagógico aos alunos, a participação e apoio na direcção de turma e nas respectivas reuniões ou ainda a participação no trabalho relativo aos testes de avaliação sumativa), foram sendo desenvolvidos de forma contínua e regular ao longo do ano lectivo e, por isso, não se encontram especificados no esquema.

A forma como todas estas actividades decorreram, encontra-se descrita em pormenor nos itens do relatório a elas dedicadas.

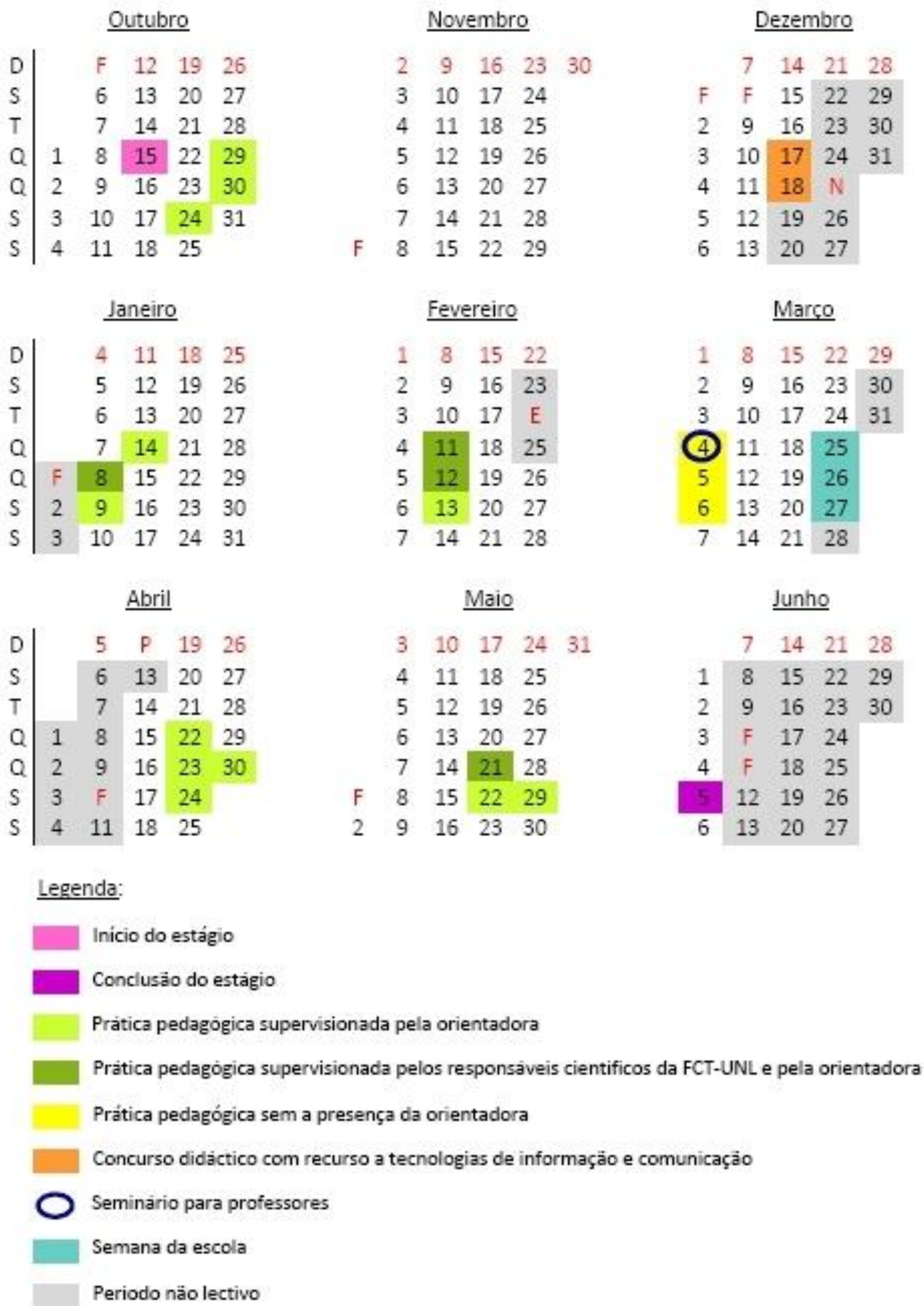


Figura 6.1. Calendário do ano lectivo 2008/2009 com indicação das principais actividades pedagógico/didácticas desenvolvidas no estágio pedagógico.

7. *Prática pedagógica*

Ao longo deste ponto irei expor, analisar e reflectir sobre a minha prática pedagógica realizada na escola ao longo do ano lectivo. Ela é constituída pela concepção, planificação e leccionação de aulas, pela dinamização de uma sala de estudo e pela participação em processos de avaliação sumativa dos alunos. Cada uma destas dimensões será respectivamente explorada em cada um dos sub-pontos posteriores.

A leitura deste ponto deverá ser realizada em paralelo com a consulta do dossiê de estágio. Este dossiê contém todos os recursos e trabalhos produzidos ao longo do estágio e que se afiguram essenciais ao acompanhamento dos conteúdos aqui apresentados: planificações de aulas, fichas de trabalho e respectivas soluções/resoluções, fichas para acções desenvolvidas com recurso a tecnologias, fichas informativas, materiais extra de apoio às actividades e momentos lectivos desenvolvidos e ainda os exercícios concebidos para testes de avaliação sumativa.

7.1. Aulas supervisionadas pela orientadora e pelos responsáveis científicos da FCT-UNL

Os momentos lectivos da minha responsabilidade tiveram lugar ao longo do ano lectivo e ocorreram em grupos de cerca de três aulas em diferentes meses: Outubro, Janeiro, Fevereiro, Março, Abril e Maio, de acordo com o calendário apresentado no ponto anterior. À excepção do grupo de aulas leccionado em Março, que resultou de uma necessidade de assegurar a continuidade lectiva num período em que a orientadora se ausentou por motivos de saúde, todos os restantes grupos de aulas leccionadas contaram com a supervisão da orientadora, tendo algumas das aulas contado igualmente com a supervisão dos responsáveis científicos da FCT-UNL.

As aulas foram planificadas tendo simultaneamente em linha de conta uma desejável sequência pedagógica e de conteúdos e o ritmo médio de aprendizagem dos alunos do 11.º ano de escolaridade (de acordo com as planificações a médio prazo elaboradas na Escola Secundária Fernando Lopes Graça). No entanto, muitas vezes e face a importantes dúvidas e dificuldades apresentadas pela turma, optei por não cumprir na íntegra as planificações efectuadas, no que se refere ao tempo de leccionação de determinados conteúdos. Optei, desta feita, por privilegiar uma construção sólida de conteúdos por parte dos alunos, tentando posteriormente recuperar esse tempo extra utilizado, esperando beneficiar da sua melhor compreensão e assimilação de conceitos e procedimentos. As planificações que figuram no dossiê representam as planificações originalmente efectuadas, sendo que as alterações produzidas encontram-se referenciadas neste relatório.

Seguidamente, passo a explorar todas as aulas por mim leccionadas. As aulas encontram-se organizadas pelos respectivos grupos. Cada grupo é examinado tendo em conta as planificações iniciais e a leccionação efectiva. O espaço dedicado a cada grupo de aulas é finalizado por uma reflexão pessoal.

GRUPO DE AULAS DE OUTUBRO

Estas aulas foram leccionadas em Outubro nos dias 24, 29 e 30 e resultaram de um desafio colocado pela orientadora, com o intuito de proporcionar um primeiro contacto com a actividade lectiva em sala de aula.

Supervisão: As três aulas foram supervisionadas pela orientadora.

Tema: Resolução de equações trigonométricas.

Planificação inicial:

Os conteúdos tinham sido originalmente preparados para serem explorados em dois tempos lectivos, de acordo com as seguintes linhas principais (pela ordem de planificação):

Aula 1

a. Revisão de alguns tipos de equações já conhecidas e das respectivas formas de resolução, para tentar enquadrar os conteúdos a abordar;

b. Exploração analítica e visual da resolução de equações trigonométricas, envolvendo a razão trigonométrica seno e resolução de exercícios de aplicação;

c. Exploração análoga à anterior para a resolução de equações trigonométricas envolvendo a razão trigonométrica co-seno;

d. Exploração da resolução de equações trigonométricas envolvendo a razão trigonométrica tangente;

e. Proposta da resolução de exercícios extra-aula para consolidação dos conhecimentos adquiridos.

Aula 2

a. Discussão e esclarecimento de dúvidas dos exercícios extra-aula propostos;

b. Exploração e resolução de equações trigonométricas apresentadas sob uma forma menos directa.

Leccionação:

A primeira aula decorreu de conforme a planificação, não tendo, no entanto sido possível abordar o conteúdo referido na alínea *d*, uma vez que, com o decorrer da aula e com as dúvidas que foram surgindo, apercebi-me que seria mais prudente e mais adequado restringir-me à leccionação dos primeiros conteúdos planificados, em benefício da sua compreensão e assimilação pelos alunos. Foi solicitada a resolução extra-aula dos exercícios correspondentes aos conteúdos explorados.

Na segunda aula, os alunos surpreenderam-me, de alguma maneira, com a quantidade de dúvidas que apresentaram nos exercícios extra-aula. Na sua grande maioria, os alunos não conseguiam resolver de forma expedita mesmo os exercícios mais simples (ver primeiras alíneas do exercício 2 da Ficha de Trabalho n.º 6A). Novamente, vi-me confrontada com a decisão entre prosseguir com os conteúdos programados, tentando não atrasar ainda mais a planificação efectuada ou, por outro lado, explorar pormenorizadamente os contornos de cada um dos exercícios nos quais os alunos apresentavam muitas dúvidas. O estado de confusão generalizado dos alunos acabou por me auxiliar na decisão. Com efeito, revelou-se deveras complicado prosseguir com novos conteúdos e com exercícios mais elaborados, quando os alunos não haviam ainda assimilado mesmo as formas mais simples de resolução de equações trigonométricas. Grande parte da aula foi então dedicada ao esclarecimento das referidas dúvidas, tendo sido ainda possível leccionar a alínea *d* da planificação da aula 1 (*exploração da resolução de equações trigonométricas envolvendo a razão trigonométrica tangente*). Foram igualmente resolvidos alguns dos exercícios referidos na alínea *b* da planificação da aula 2. Foi solicitada a resolução extra-aula dos exercícios correspondentes aos conteúdos abordados.

A terceira aula foi dedicada ao esclarecimento de dúvidas dos exercícios extra-aula propostos na aula anterior e à resolução dos restantes exercícios referidos na alínea *b* da planificação da aula 2. Foi solicitada a resolução extra-aula dos restantes exercícios da Ficha de Trabalho n.º 6A.

Reflexão pessoal:

No âmbito geral as aulas decorreram de forma harmoniosa. Os alunos demonstraram acompanhar os raciocínios explorados e participaram activamente na sua construção. Por esta razão, é que não pude deixar de ficar um pouco surpreendida com as dificuldades e dúvidas apresentadas pelos alunos, sobretudo na segunda aula leccionada. Sem pretender lançar-me, de forma alguma, em apreciações aprofundadas acerca das causas deste facto, permito-me arriscar que ele poderá dever-se, exactamente, à compreensão algo facilitada que os alunos inicialmente manifestaram na abordagem do tema e a um consequente afrouxamento do cuidado e da atenção com os raciocínios, quer analíticos quer visuais, utilizados na resolução dos respectivos exercícios.

Esta situação colocou-me, no entanto, perante uma questão pertinente: qual o papel da planificação efectuada para uma determinada aula e que exigência colocar no seu cumprimento? Ao reflectir sobre o assunto, creio que a planificação não deverá assumir unicamente um papel prescritor e, porventura, castrador da desejável evolução dinâmica da aula, mas, sobretudo, funcionar como um roteiro de apoio e um garante da qualidade científica dos conteúdos a explorar. O docente, no seguimento desse roteiro, poderá e deverá analisar, ao longo na aula, a pertinência da necessidade de alteração ou de adiamento de alguma ou algumas das suas componentes. Temo, no entanto, que esta fronteira de discernimento apresente contornos algo ténues e que na aula, frente aos alunos, não consiga deixar de sentir certas dúvidas e indecisões momentâneas quanto ao rumo a tomar.

Este grupo de aulas leccionadas ocorreu após apenas uma semana do início do estágio e, por isso mesmo, verifiquei alguma dificuldade em identificar individualmente os elementos da turma, distinguindo-os do todo. Perante esta dificuldade e após a primeira aula, intensifiquei o meu esforço em estabelecer a correspondência entre os alunos e as suas fotografias, ainda que algumas delas se encontrassem algo desactualizadas. Outra das dificuldades que verifiquei foi igualmente a falta de sensibilidade, nesta fase inicial do estágio, para o ritmo próprio de trabalho da turma e para o nível de compreensão de cada um dos seus elementos. Com esta primeira experiência lectiva, ficou bastante clara a importância deste conhecimento na planificação e leccionação por parte de um docente.

Para concluir, gostaria de acrescentar mais uma nota de reflexão relativamente à permanente correcção que um docente deve possuir em todos os momentos. Refiro-me agora a esta dimensão, pois próximo do final da primeira aula leccionada, afrouxei ligeiramente a atenção que dedicava à organização da escrita no quadro e, rapidamente fui confrontada com uma certa falta de espaço para conseguir escrever, de forma clara, uma determinada equação. Logo nesse instante reiterei para mim própria a importância da correcção permanente de um professor. Uma informação escrita de forma menos clara, poderá facilmente despoletar confusões e dificuldades nos alunos, com maiores ou menores consequências a nível da compreensão global dos conteúdos em estudo. Consciente desta relevância, a organização de escrita no quadro não mais deixou de integrar a lista das minhas preocupações e prioridades na leccionação das restantes aulas do estágio.

GRUPO DE AULAS DE JANEIRO

Inicialmente programadas para o primeiro período, estas aulas foram leccionadas nos dias 8, 9 e 14 de Janeiro, por motivos que se prenderam com um anterior atraso na leccionação dos conteúdos planificados.

Supervisão: As três aulas foram supervisionadas pela orientadora, tendo a primeira delas igualmente sido supervisionada pela responsável científica da FCT-UNL, a professora Doutora Maria Helena Santos.

Tema: Intersecção de planos e interpretação geométrica.

Planificação inicial:
Os conteúdos haviam sido originalmente preparados para serem explorados em dois tempos lectivos (e eventualmente mais um, dedicado ao esclarecimento de dúvidas na resolução de exercícios), de acordo com as seguintes linhas principais (pela ordem de planificação):

Aula 1

a. Organização dos alunos em grupos para explorar as várias possibilidades de intersecção de dois e de três planos, com recurso ao computador e ao programa *Derive*.

b. Discussão na turma, com o apoio do quadro interactivo, em torno das situações encontradas, relacionando-as com os conhecimentos sobre as equações dos planos, explorando modelos em três dimensões com recurso a cartolinas e estabelecendo um paralelo com o conjunto solução do correspondente sistema de equações.

c. Entrega de uma ficha informativa com o resumo das situações exploradas.

Aula 2

a. Exploração da resolução de sistemas de três equações a três incógnitas, recorrendo a três métodos: método de substituição, método de adição ordenada e método misto.

b. Resolução dos sistemas de equações respeitantes à intersecção dos vários conjuntos de três planos explorada visualmente na actividade da aula 1, e identificação analítica das respectivas soluções.

c. Proposta da resolução de exercícios extra-aula para consolidação dos conhecimentos adquiridos.

Leccionação:

Na primeira aula, os alunos acabaram por demorar mais tempo do que o previsto com a actividade de exploração das várias situações de intersecção de planos com recurso ao computador, deixando pouco espaço para a discussão referida na alínea *b*. No entanto, a planificação da aula foi cumprida, embora de uma forma menos profunda que a programada e que a desejável.

A segunda aula foi inteiramente dedicada à resolução de sistemas de três equações a três incógnitas, recorrendo aos três diferentes métodos (conforme, alínea *a* da aula 2). Os alunos apresentaram muitas dificuldades nas diferentes formas de resolução e, contrariamente ao que tinha ocorrido na aula anterior, não insisti em cumprir a planificação efectuada, privilegiando, desta feita, a construção mais consistente dos conhecimentos. Esta opção foi igualmente justificada pelo facto da resolução dos sistemas indicados na alínea *b*[5] dever ocorrer preferencialmente após os alunos possuírem o domínio da resolução geral de sistemas.

Na terceira aula procedeu-se à resolução analítica e à respectiva classificação dos sistemas explorados na primeira aula (conforme alínea *b* da aula 2). Aproveitando o retorno às situações aí exploradas, foram igualmente discutidas com maior minúcia algumas questões então abordadas de forma menos aprofundada. Foi ainda disponibilizado tempo para os alunos se dedicarem à resolução de sistemas, aproveitando a presença na aula das duas docentes para o esclarecimento personalizado das suas dúvidas.

[5] Sistemas de três equações a três incógnitas com diversas classificações: sistemas possíveis determinados, sistemas possíveis indeterminados e sistemas impossíveis.

Reflexão pessoal:

A primeira aula deste grupo seguiu uma estratégia de inovação discutida no núcleo de estágio, que pretendia privilegiar a criação de ambientes de aprendizagem dinâmicos e potenciadores da formação de imagens fundamentais para a compreensão de novos conceitos. Por isso o recurso ao programa *Derive* com a respectiva exploração de situações pelos próprios alunos e o recurso ao quadro interactivo. Por este facto, esta aula, que consistia na primeira aula supervisionada pelos responsáveis científicos da FCT-UNL, e por isso mesmo, uma aula importante na avaliação do meu desempenho no estágio pedagógico, foi uma aula que assumiu uma certa audácia e risco. Com efeito, quer os imponderáveis frequentemente associados à utilização de material informático, quer a própria natureza de uma actividade de investigação, mais aberta e menos controlável pelo professor, conferiam à aula este carácter audacioso e "arriscado". Consequentemente e ao iniciar a aula, encontrava-me um pouco mais apreensiva do que era habitual.

Os alunos demoraram mais tempo do que o expectável na exploração dos casos presentes na ficha de trabalho, com recurso ao programa *Derive*, sobretudo tendo em conta o tempo por eles demorado em actividades semelhantes, realizadas com o mesmo programa e, arrisco, com maior complexidade, no fim do trimestre passado[6]. O facto de se ter verificado uma interrupção lectiva e festividades de Natal e Ano Novo, poderá ter influenciado, de alguma forma, e no meu ponto de vista, este diferente desempenho dos alunos. Alguns grupos revelaram um atraso muito significativo no desenvolvimento da actividade. Julguei importante que todos os grupos explorassem todas as situações antes de se proceder à discussão em grande grupo e fui permitindo que os alunos despendessem mais algum tempo nesta primeira parte. Assim, o tempo reservado para a componente de discussão acabou por ser muito diminuto. Preocupada em cumprir a planificação efectuada e apreensiva por estar a ver o tempo a escoar, acabei por conduzir a discussão com um grau de pormenor inferior ao desejável, pois julguei então ser importante rever e resumir todas as situações exploradas, enquanto os alunos ainda as possuíam na memória, optando por deixar para a aula seguinte uma discussão mais cuidada. No entanto, esta parte da aula acabou por apresentar um menor rigor e revelar-se menos conseguida.

[6] Ver o ponto 8 *Concurso didáctico com recurso a tecnologias de informação e comunicação*.

Outra componente que funcionou menos bem nesta aula, foi a manutenção da atenção dos alunos. Com efeito, após os alunos se encontrarem a desenvolver uma actividade exploratória em pequeno grupo e num ambiente mais descontraído, tornou-se um pouco mais complicado voltar a apelar para a sua atenção, concentração e silêncio para prosseguir a aula num formato mais tradicional. Por outro lado, verificou-se igualmente uma falta de atenção perturbadora nos elementos de dois grupos que concluíram a actividade antes dos colegas. No sentido de tentar ultrapassar estas questões, a professora Maria Helena Santos sugeriu posteriormente a preparação de uma actividade adicional para os alunos mais adiantados, enquanto a professora Lourdes Ventura propôs o iniciar da discussão mesmo antes de todos os grupos terem concluído a exploração.

Ressalta desta experiência pedagógica a grande importância que a gestão da aula possui, sobretudo a gestão da aula em tempo real. Percebi que, por mais que se planifique e se estabeleçam estratégias prévias, a realidade em sala de aula apresenta dinâmicas próprias e poder-nos-á colocar perante situações não programadas. Creio que a capacidade de resposta de um docente a essas situações vai sendo aprimorada ao longo dos anos com a sua experiência de ensino, no entanto julgo ser fundamental que um docente cultive uma permanente atenção e sensibilidade para a detecção destas situações e que procure a serenidade para as ultrapassar de forma adequada.

Julgo, no entanto, que algumas das dificuldades verificadas na condução temporal da aula conseguiram ser, em parte, colmatadas pelos materiais produzidos e pelo cuidado que havia dedicado à sua planificação. Com efeito, constatei que, para os alunos, a identificação das várias situações de intersecção de dois e de três planos tornou-se bastante clarividente. Percebia-se nas suas expressões e nos seus prontos gestos de assentimento que estavam a acompanhar os raciocínios explorados. Creio que a utilização de um programa que permite a exploração e a manipulação das várias situações foi verdadeiramente benéfica e que muito contribuiu para este facto.

Uma outra dimensão assinalada pela Professora Maria Helena Santos acerca da minha prestação foi a existência de uma certa falta de rigor em algumas expressões ao nível da linguagem corrente. Confesso que ainda não me encontrava alerta para essa situação, uma vez que sempre tentei quotidianamente e em todas as situações, inclusivamente em situações lectivas, imprimir um grande rigor ao meu discurso. Esta chamada de atenção revelou-se importante, pois permitiu-me começar a aperceber-me, em aulas posteriores, da utilização recorrente de algumas expressões menos cuidadas e logo encetar esforços no sentido de ultrapassar esta situação.

As duas aulas seguintes decorram de forma consistente, serena e sem grandes sobressaltos.

A segunda aula foi dedicada à resolução de sistemas de três equações a três incógnitas. Como os alunos apresentaram muitas dificuldades nas suas diferentes formas de resolução, resolvi despender todo o tempo da aula para a sua compreensão, prática e consolidação. Apesar de não ter cumprido a planificação efectuada, contribui, assim, para uma melhor apreensão de conhecimentos e uma melhor interiorização de procedimentos. E esta revelou-se, mais uma vez, uma decisão acertada.

Na terceira aula foram revisitados os sistemas explorados na primeira aula, procedendo-se agora à sua resolução analítica. Houve então oportunidade para voltarmos a discutir as várias relações entre os vectores normais a diferentes planos, as suas equações e as suas posições relativas, assim como o significado das diferentes classificações dos sistemas, que haviam sido duas das dimensões abordadas de uma forma menos satisfatória na primeira aula. Foi compensador observar que, apesar de já ter decorrido quase uma semana desde essa primeira aula, os alunos haviam interiorizado de uma forma sólida todos os casos aí abordados, recordando-se muito bem deles e participando activamente na respectiva discussão. A assimilação visual das várias situações de posições relativas de planos e respectivas intersecções revelou-se tão conseguida que chegaram mesmo a ocorrer algumas situações em que era questionada a classificação do sistema de três equações a três incógnitas e em que os alunos retorquiam prontamente com o conjunto de pontos resultantes da intersecção dos respectivos planos, como por exemplo "é uma recta!" ou "é o conjunto vazio!". Foi necessário esclarecer com cuidado a diferença entre estas duas dimensões.

A segunda parte da aula em que os alunos se dedicaram à resolução de sistemas revelou-se muito proveitosa, pois os alunos, após terem apreendido os conceitos revelavam muita necessidade de exercitar os respectivos cálculos. Os alunos apresentaram muitas dúvidas e esclareceram muitas confusões. As docentes deslocaram-se pela sala, prestando-lhes uma assistência personalizada.

GRUPO DE AULAS DE FEVEREIRO

Estas aulas foram leccionadas nos dias 11, 12 e 13 de Fevereiro.

Supervisão: As aulas foram supervisionadas pela orientadora e pelos responsáveis científicos da FCT-UNL, a professora Doutora Maria Helena Santos e o professor Doutor Filipe Marques, à excepção da última que foi apenas supervisionada pela orientadora.

Tema: Operações com funções.

Planificação inicial:

Os conteúdos tinham sido originalmente preparados para serem explorados em três tempos lectivos, de acordo com as seguintes linhas principais (pela ordem de planificação):

Aula 1

a. Definição da adição de funções. Exploração de alguns exemplos. Interpretação gráfica.

b. Definição da subtracção de funções. Exploração de um exemplo.

c. Definição da multiplicação de funções. Exploração de um exemplo.

d. Proposta da resolução de exercícios extra-aula para consolidação dos conhecimentos adquiridos

Aula 2

a. Continuação da exploração de exemplos da multiplicação de funções. Interpretação gráfica.

b. Definição da divisão de funções. Exploração de alguns exemplos. Interpretação gráfica.

c. Proposta da resolução de exercícios extra-aula para consolidação dos conhecimentos adquiridos.

Aula 3

Resolução em grupos de uma ficha de trabalho sobre operações com funções.

Leccionação:

Os conteúdos programados foram leccionados de acordo com a planificação efectuada. O tempo superveniente de quarenta e cinco minutos, que se seguiu à primeira aula foi aproveitado para explorar os exercícios extra-aula, em conjunto com os alunos.

Reflexão pessoal:

Na primeira aula, a turma encontrava-se muito irrequieta e apática, pois os alunos tinham acabado de realizar um momento de avaliação sumativa da disciplina de

Biologia e Geologia que não lhes tinha corrido especialmente bem. Não foi muito fácil conseguir que ficassem mais sossegados e que estivessem atentos à aula, mas com o tempo e com os meus esforços, os alunos acabaram por colaborar e participar activamente na exploração dos conteúdos. Tentei envolvê-los progressivamente na aula, chamando-lhes à atenção, quer formal quer informalmente, colocando-lhes questões relativas aos conteúdos trabalhados e estabelecendo conexões com conhecimentos previamente adquiridos.

No que concerne às questões de rigor de linguagem, estive mais atenta a esse aspecto e creio que apresentei uma evolução positiva, tendo, no entanto, ainda utilizado alguns termos de forma menos correcta. Numa das ocasiões em que tal ocorreu, um aluno encontrava-se no quadro a resolver um exercício e apresentava-se com o raciocínio bloqueado. Após algumas tentativas minhas para o ajudar a ultrapassar essa dificuldade, diga-se sem sucesso, acabei por sucumbir à tentação de utilizar uma linguagem mais corrente para o fazer entender o procedimento necessário. É realmente importante continuar a investir na melhoria deste aspecto, em todas as situações lectivas, tanto nos momentos mais estruturados e programados de exposição de conteúdos, como, neste caso, nos momentos mais espontâneos e imprevisíveis.

Para este grupo de aulas tentei utilizar uma abordagem mais intuitiva e que permitisse que os alunos participassem, eles próprios, na construção dos conceitos. Involuntariamente, acabei por fazê-lo em detrimento de algum formalismo e de alguma clarificação dos conceitos envolvidos, nomeadamente do conceito de função. Legitimamente, a professora Maria Helena Santos, realçou este aspecto. Com efeito e embora o conceito formal de função já tivesse sido objecto de estudo do 10º ano de escolaridade, é realmente importante relembrar e abordar todos os conceitos com muito rigor matemático, de forma a minorar possíveis equívocos nos alunos. Como já referi anteriormente, creio que o rigor deve assumir uma importância fundamental em todos os momentos lectivos. É importante que os alunos convivam com ele, o assimilem e o utilizem na construção dos seus próprios raciocínios matemáticos. Assim, reconheci prontamente a existência de algumas lacunas formais na primeira aula e cuidei de as colmatar de forma rigorosa na aula seguinte.

Relativamente ainda aos conteúdos explorados na primeira aula, e conhecendo as dificuldades usualmente apresentadas pelos alunos na determinação do domínio de uma função resultante de uma operação de outras funções, insisti com alguma veemência na sua determinação prévia. Esta insistência deu os seus frutos, pois todos os alunos manifestaram esse cuidado no tempo superveniente, quando se encontravam a realizar, individualmente, exercícios de aplicação dos conhecimentos adquiridos. Gostaria ainda de registar a sugestão do professor Filipe Marques ao propor que, com um fim pedagógico, eu poderia ter deixado de conduzir os alunos para a determinação prévia do domínio, no caso por exemplo da função $f \cdot g$, com $f(x) = x^2 - 4$ e $g(x) = \frac{1}{x-2}$, de forma a provocar intencionalmente o erro. Este tipo de procedimento possui, de facto, um carácter educativo que poderá ser muito útil na consolidação do conhecimento pelos alunos. É um procedimento que considerarei certamente em experiências lectivas futuras.

A segunda aula foi iniciada por uma revisão dos conteúdos em estudo, aproveitando o momento para, conforme já referido, abordar de modo mais formal os conceitos envolvidos, colmatando assim algumas lacunas verificadas na aula anterior. Conforme assinalado pelos professores supervisores, apresentei, nesta aula, uma exposição segura e fui bem sucedida em contornar as dúvidas e as situações menos óbvias levantadas pelos alunos. Não obstante, poderia ainda ter aproveitado melhor algumas das suas observações, de modo a explorar e clarificar de forma mais consistente alguns conceitos e respectivos fundamentos. Por seu turno, a professora Lourdes Ventura assinalou, de forma muito pertinente, no meu entender, uma situação a ter em atenção em oportunidades futuras: tratou-se de uma representação gráfica que comecei a esboçar no quadro sem a acompanhar por uma respectiva descrição oral. Com esta chamada de atenção, tornou-se realmente muito claro para mim que este procedimento pode contribuir para o surgimento de estados de desorientação inicial, que se revelem difíceis de dissipar à *posteriori*. Este constituiu um aspecto pedagógico de relevo, para o qual eu ainda não me encontrava suficientemente sensibilizada.

No diálogo estabelecido após a aula, voltou a abordar-se a pertinência do procedimento pedagógico que designarei por “provocação do erro”, referido nos comentários relativos à aula anterior. Desta feita, o procedimento em causa prendia-se com uma função racional cujo domínio era representado, obviamente, por todos os números reais que não anulassem o seu denominador. Para tentar realçar este aspecto junto dos alunos, optei por escrever no quadro o valor da função num desses pontos não pertencentes ao domínio, surgindo, na sequência, uma fracção com denominador nulo. Esta minha opção foi alvo de algumas críticas, uma vez que a escrita de uma forma incorrecta no quadro poderá, para alguns alunos menos atentos à explicação que a acompanhava, ser considerada como correcta e transcrita para o seu caderno diário como tal. Com efeito, é necessário agir de forma muito ponderada quando se pretende utilizar o procedimento de "provocação do erro". É necessário analisar o caso específico, de acordo com os conteúdos a abordar e com a turma com a qual se está a trabalhar. Neste caso particular, e compreendi-o bem após a referida chamada de atenção, a escrita duma expressão incorrecta no quadro assume muito mais um carácter perigoso do que o de uma boa estratégia educativa.

Do conjunto de grupos de aulas que leccionei supervisionadas pelos responsáveis da FCT-UNL, tentei preparar diferentes tipos de estratégias pedagógicas. Assim, das aulas dos três grupos existentes, estas foram as que possuíram um carácter mais expositivo[7]. É, no entanto, de realçar que este tipo de aulas requer uma maior atenção por parte do docente no que concerne ao envolvimento dos alunos com os conteúdos explorados e com os exercícios de aplicação desenvolvidos. Com efeito, numa aula mais expositiva o docente poderá ser facilmente tentado a desenvolver sequencialmente a aula, de acordo com o fio condutor previamente preparado, descorando uma participação activa e desejável dos alunos. Neste domínio reconheço que, nestas aulas, poderia ter incentivado um maior envolvimento por parte dos alunos. E este é um aspecto ao qual terei de necessariamente dedicar uma maior atenção no futuro. Em conclusão, esta segunda aula decorreu de forma sólida e bem conseguida, apresentando ainda alguns aspectos a optimizar.

A terceira aula foi dedicada à resolução de uma ficha de trabalho sobre os conteúdos explorados nas duas aulas anteriores. Na construção da ficha de trabalho tive sobretudo o cuidado de incluir uma grande variedade de exercícios que envolvessem a inter-relação e a aplicação dos conhecimentos adquiridos, de forma a facilitar a sua clarificação e interiorização. Mais uma vez, e como de costume neste tipo de aulas, os alunos foram organizados em grupos, envolvendo-se na exploração dos exercícios propostos e contando com o auxílio e o incentivo das duas docentes, que se deslocavam pela sala. A aula funcionou muito bem e cumpriu o seu objectivo de consolidação dos conhecimentos. Muitos foram os alunos que manifestaram, quer verbalmente, quer

[7] As aulas do primeiro grupo possuíram um carácter explorativo por parte dos alunos, com recurso a tecnologias de informação (ver a secção GRUPO DE AULAS DE JANEIRO neste ponto), enquanto as aulas do último grupo seguiram uma estratégia de investigação orientada, com recurso a fichas de trabalho (ver a secção GRUPO DE AULAS DE MAIO neste ponto).

através das suas expressões faciais, uma saudável satisfação pela compreensão e manipulação dos conteúdos trabalhados nas aulas anteriores.

GRUPO DE AULAS DE ABRIL

Estas aulas foram leccionadas em Abril nos dias 22, 23, 24 e 30 e foram parte integrante da actividade de investigação por mim desenvolvida, no contexto da prática pedagógica. Estas aulas possuíram um propósito completamente distinto das restantes. Com esta actividade pretendia-se sobretudo observar e registar todos os níveis de resposta dos alunos aos conceitos leccionados e à forma como estes foram leccionados. Para isso foi desenhado um trabalho de investigação independente e que é igualmente parte integrante da unidade curricular Estágio Pedagógico do Mestrado em Ensino da Matemática. Os comentários e reflexões alusivos a estas aulas são parte constituinte desse trabalho de investigação, que pode ser encontrado na Parte II deste documento.

GRUPO DE AULAS DE MAIO

Estas aulas foram leccionadas nos dias 21, 22 e 29 de Maio.

Supervisão: As três aulas foram supervisionadas pela orientadora, tendo a primeira sido igualmente supervisionada pelos responsáveis científicos da FCT-UNL, a professora Doutora Maria Helena Santos e o professor Doutor Filipe Marques.

Tema: Sucessões: progressões aritméticas e progressões geométricas.

Planificação inicial:

Os conteúdos tinham sido originalmente preparados para serem explorados em dois tempos lectivos, de acordo com as seguintes linhas principais (pela ordem de planificação):

Aula 1

a. Construção com os alunos do conceito de progressão aritmética. Formalização da sua definição e exploração de alguns exemplos simples.

b. Apoio aos alunos na obtenção do termo geral de uma progressão aritmética específica, uma vez conhecidos o primeiro termo e a razão.

c. Dedução no quadro, com a ajuda dos alunos, do termo geral de uma progressão aritmética (u_n) genérica, de razão r e primeiro termo u_1. Resolução de um exercício simples de aplicação.

d. Estudo sobre a forma de distribuição dos termos de uma progressão aritmética num referencial cartesiano.

e. Estudo sobre a monotonia de uma progressão aritmética e análise dos casos em que este tipo de sucessão é ou não limitada.

f. Apoio aos alunos na obtenção do termo geral de uma progressão aritmética específica, uma vez conhecidos o seu termo de determinada ordem e a razão.

g. Dedução no quadro, com a ajuda dos alunos, do termo geral de uma progressão aritmética (u_n) genérica, de razão r e termo de ordem *k* u_k.

h. Resolução de exercícios de aplicação.

i. Proposta da resolução de exercícios extra-aula para consolidação dos conhecimentos adquiridos.

Aula 2

a. Revisão dos conteúdos em estudo e correcção dos exercícios extra-aula.

b. Apoio aos alunos na obtenção da soma dos cem primeiros números naturais e na obtenção da soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética. Discussão em torno da paridade do número *n* de termos que se pretende adicionar.

c. Auxílio aos alunos no estabelecimento de uma expressão genérica para o cálculo da soma dos primeiros termos de uma progressão aritmética, apresentação da respectiva prova e resolução de um exercício de aplicação.

d. Proposta de resolução de exercícios extra-aula para consolidação dos conhecimentos adquiridos.

e. Construção com os alunos do conceito de progressão geométrica. Formalização da sua definição e exploração de alguns exemplos simples.

f. Apoio aos alunos na obtenção do termo geral de uma progressão geométrica específica, uma vez conhecidos o primeiro termo e a razão.

g. Dedução no quadro, com a ajuda dos alunos, do termo geral de uma progressão geométrica (u_n) genérica, de razão r e primeiro termo u_1. Resolução de um exercício simples de aplicação.

Leccionação:

A leccionação da aula 1 foi cumprida de acordo com a planificação efectuada, enquanto na aula 2 não foi possível iniciar o estudo das progressões geométricas (pontos *e* a *g*), uma vez que os alunos manifestaram muitas dificuldades na resolução dos exercícios propostos. Assim, e mais uma vez, foi decidido optar por uma construção sólida dos conhecimentos por parte dos alunos, em detrimento do cumprimento da planificação efectuada. Os conteúdos não abordados na segunda aula foram trabalhados numa aula posterior[8]. Para esta terceira aula, e para conferir uma continuidade aos conteúdos abordados, preparei para além dos conteúdos inicialmente planificados, a leccionação da análise do comportamento de uma progressão geométrica. Assim, foi explorada a representação gráfica de uma progressão geométrica em função do seu primeiro termo e da razão, foi analisada a sua monotonia e foram analisados os casos em que esta sucessão é ou não limitada. Paralelamente foi realizado um estudo da relação entre todos estes conceitos, construindo para cada um dos casos possíveis um exemplo ilustrativo. Elaborei e entreguei aos alunos uma ficha informativa (ver no dossiê a Ficha Informativa N.º 6) com um resumo esquemático do estudo efectuado nesta aula.

Reflexão pessoal:

A primeira aula decorreu de forma muito satisfatória a todos os níveis. Tentei, e creio que consegui, optimizar alguns dos aspectos a melhorar, assinalados nas aulas anteriores. Foi igualmente com muita satisfação que verifiquei que tanto a orientadora, como os responsáveis científicos da FCT-UNL, partilharam igualmente da minha opinião. Assim, e por exemplo, apresentei agora um grande cuidado com a linguagem, preparei uma aula em que a participação e a construção do conhecimento por parte dos alunos era muito solicitada e consegui manter uma boa interacção com eles, quer em situações de exposição de matéria junto ao quadro, quer em situações de resolução e exploração de exercícios, deslocando-me pelos seus lugares e inteirando-me das suas dificuldades. Apesar de não ter constituído um aspecto muito assinalado nas aulas anteriormente leccionadas, a orientadora quis igualmente frisar a boa organização do quadro verificada nesta aula. Por seu turno, a professora Maria Helena Santos realçou a ênfase por mim colocada na construção formal dos conceitos matemáticos, nomeadamente a ênfase colocada na construção da matemática baseada em definições e no recurso a estas últimas como instrumento de aferição de conteúdos. Este havia sido um dos aspectos a melhorar, assinalados nas aulas anteriores.

---

[8] As duas aulas seguintes, na quarta-feira, 27 e na quinta-feira, 28 foram dedicadas, respectivamente à preparação para o teste de avaliação sumativa e à realização do teste, de modo que a matéria em estudo só foi retomada na sexta-feira, dia 29 de Maio.

Tive igualmente o cuidado de planificar uma aula um pouco menos ambiciosa em termos da quantidade de conteúdos a abordar, relativamente às aulas anteriores, tentando valorizar, assim, uma melhor e mais sólida construção inicial dos conceitos por parte dos alunos. Este aspecto foi igualmente valorizado por todos os professores supervisores, pois tal como eu, acreditam que este investimento de tempo na compreensão inicial de um conceito pode ser grandemente recompensado, com uma melhor compreensão e uma consequente maior velocidade de progressão na exploração dos conteúdos relacionados.

Gostaria ainda de deixar uma nota para o bom desempenho dos alunos nesta aula. Com efeito, e apesar de alguns dos meus receios iniciais[9], os alunos responderam muito bem aos desafios que lhes foram colocados, explorando com muito entusiasmo as situações propostas, procurando descobrir e estabelecer relações e até tentando antecipar conteúdos e procedimentos posteriores.

Na segunda aula, como referido, não foi possível cumprir com a planificação efectuada, pelas muitas dúvidas apresentadas pelos alunos na resolução dos exercícios de aplicação dos conteúdos da aula anterior. No entanto e mais uma vez, foi importante despender este tempo extra para permitir a sólida compreensão desses conteúdos. Tal como ocorrera na aula anterior, os alunos assumiram uma atitude participativa e entusiástica, envolvendo-se, experimentando e conjecturando. No fim da aula, o seu nível de interiorização e manipulação dos conceitos encontravam-se claramente muito mais elevado e consolidado.

Na terceira aula, que decorreu após a realização do último teste do ano lectivo, o ambiente na sala de aula apresentava-se um pouco mais descontraído. Não obstante, e provavelmente por essa mesma razão, os alunos mantiveram uma atitude participativa e interessada. Libertos de alguma da pressão, por vezes suscitada pelos momentos de avaliação, os alunos mostraram-se interessados na matemática pela matemática, mostrando-se interessados em dar continuidade ao trabalho de exploração efectuado nas aulas anteriores. Os conteúdos programados foram explorados de forma dinâmica e consistente.

Devo confessar que também eu, nesta fase de conclusão do estágio, me senti tentada a entregar-me a uma certa descontracção, tendo-me, no entanto esforçado por manter

[9] Como a aula se encontrava assente em actividades exploratórias efectuadas pelos alunos e nas correspondentes descobertas e conclusões e tendo em consideração algum desinteresse algumas vezes verificado na turma, cheguei a temer que os alunos não conseguissem motivar-se e envolver-se o necessário e que a aula não funcionasse como o pretendido.

uma postura profissional, como julgo que deve acontecer em todos os momentos. A aula correu de forma tranquila e não foram assinalados quaisquer incidentes.

Este grupo de aulas leccionadas em Maio constituiu a última experiência lectiva do meu estágio profissional. No ponto 11 (*Reflexões finais e conclusões*) teço algumas considerações críticas sobre a evolução desta componente ao longo do ano.

7.2. Aulas sem a presença da orientadora

Por impossibilidade da orientadora, que se ausentou da escola por motivos de saúde, garanti a condução das aulas nos dias 4, 5 e 6 de Março. A docente Lourdes Ventura conseguiu preparar fichas de revisão dos conteúdos trabalhados nas aulas anteriores, para serem exploradas nestes três tempos lectivos. Assim, os alunos foram organizados em grupos e procederam à exploração das actividades e exercícios propostos. A minha função baseou-se na condução e orientação geral dos trabalhos a realizar pelos alunos, assim como no auxílio e esclarecimento das suas dúvidas. Efectuei ainda algumas revisões de conteúdos no quadro, sempre que necessário, quer em situações em que os alunos não se recordavam dos conceitos, quer em situações em que se verificavam dúvidas generalizadas na sua aplicação.

Esta oportunidade de leccionar individualmente um grupo de aulas, que não se proporcionaria normalmente, de acordo com os actuais moldes dos estágios pedagógicos, revelou-se para mim uma experiência muito desafiante e enriquecedora. Com efeito, várias foram as dificuldades que enfrentei nestas aulas. Os alunos mostraram-se algo irrequietos e pouco motivados, roçando por vezes a displicência. O nível de conversa e de distracção foi mais elevado do que o normal, o empenho na resolução formal dos exercícios foi mais reduzido e verificou-se uma certa inércia na abordagem inicial das actividades propostas. No meu entender, este seu comportamento ficou a dever-se sobretudo à conjunção de duas condicionantes: a ausência da sua professora de referência e a condução das aulas por uma, no seu ponto de vista, "quase" professora. Com efeito, creio que o facto de os alunos terem conhecimento da minha condição de formanda, lhes poderá ter induzido uma certa concepção de um ambiente de sala de aula mais descontraído e menos "a sério". O grande desafio que então se me colocou, e que não havia ainda verdadeiramente ocorrido, pela presença de algum modo protectora da orientadora, foi o de conseguir manter um bom ambiente de trabalho na sala de aula, pautado pelo interesse e pelo respeito. Como o fazer então? Assumir uma atitude mais autoritária e intransigente ou, pelo contrário, tentar cativar os alunos pelo diálogo e compreensão? Nestas aulas, ensaiei um pouco das duas possibilidades, tentando doseá-las da forma que me foi parecendo mais adequada, de acordo com o evoluir da aula. Fui experimentando soluções, questionando-as e analisando-as no próprio momento. Senti muitas dúvidas. No final de cada uma das aulas, reflectia e dedicava-me a uma análise crítica sobre como conseguir o tão desejado e difícil equilíbrio entre autoridade e compreensão, de forma a promover um ambiente saudável e propício ao desenvolvimento de conhecimentos. Troquei igualmente impressões com a orientadora a este respeito. Ela transmitiu-me a sua visão de como o processo pode normalmente decorrer de uma forma mais suave quando se estabelece uma ligação directa com os alunos, uma ligação baseada nos fundamentos do respeito e da amizade. Partilho claramente da sua opinião. O problema por vezes coloca-se em como conseguir atingir este tipo de ligação saudável com os alunos.

Com o decorrer das aulas, o ambiente na sala de aula foi melhorando claramente, quer ao nível do comportamento, como a nível do interesse e empenho demonstrado. Na verdade, creio que tanto eu como os alunos, fomo-nos adaptando à nova situação pedagógica. Por vezes, em situação de mudança, é necessário saber conceder o tempo essencial aos reajustamentos a ela implícitos.

Esta constituiu uma experiência muito enriquecedora. Pelas dificuldades e dúvidas que senti, acredito que este tipo de componente lectiva faz alguma falta num estágio profissionalizante, que se pretende completo e basilar para a formação de professores de qualidade. Não obstante, acredito não existirem receitas para ultrapassar este tipo de dificuldades. Cada professor irá desenvolvendo a sua forma de actuar, ao longo dos anos de leccionação, também de acordo com a especificidade dos alunos com quem trabalha.

7.3. Sala de estudo

Pela assistência das primeiras aulas, assim como pelo retorno obtido pelas aulas que leccionei logo na segunda e terceira semanas do estágio pedagógico, tornaram-se evidentes as elevadas dificuldades de acompanhamento dos conteúdos leccionados por parte de alguns alunos da turma. Por outro lado, se a maioria dos alunos frequentava o apoio da responsabilidade da docente Lourdes Ventura, existiam igualmente alguns que não possuíam disponibilidade de horário para o fazer. Assim, achei por bem voluntariar-me para proporcionar, tanto a uns como aos outros, um apoio adicional numa sala de estudo, esperando deste modo, contribuir para minorar os casos de grandes dificuldades verificados. A sala de estudo foi então agendada para as quartas-feiras à tarde, nos quarenta e cinco minutos seguintes à componente escolar da turma, tendo sido iniciada no dia doze de Novembro e tendo funcionado semanalmente, de forma regular[10], até ao final do ano lectivo. A sua frequência era opcional.

Foi com muito agrado que verifiquei que os alunos que possuíam maiores dificuldades, compareceram regularmente à sala de estudo. Com efeito, uma das angústias que sinto enquanto professora (embora ainda em formação) prende-se com um certo sentimento de impotência para ajudar, de forma consistente em contexto de grande grupo, alunos que exibem dificuldades mais profundas de compreensão e de acompanhamento dos conteúdos explorados. Com efeito e com o tempo distribuído de forma optimizada pelos conteúdos programáticos ao longo do ano lectivo e com a atenção que se quer repartida o mais equitativamente possível por todos os alunos, creio ser, de facto, muito difícil contribuir para a recuperação daqueles que requerem um trabalho mais específico e individualizado. Foi exactamente com o intuito de tentar colmatar um pouco destas lacunas, que me ofereci para prestar o apoio adicional e é por este facto que fiquei muito satisfeita por estes alunos também reconhecerem este novo espaço como mais um espaço de oportunidade para a recuperação pretendida. Para além destes, a sala de estudo constituiu igualmente uma opção para alguns alunos com menores dificuldades, que assim aproveitaram para consolidar os seus conhecimentos.

Neste espaço eram normalmente trabalhados os conceitos em estudo no momento. A organização da sala de estudo dependia muito do número de alunos presentes e das dúvidas apresentadas. Assim, por vezes os alunos trabalhavam individualmente ou em pequenos grupos, solicitando a minha ajuda quando lhes surgia alguma dificuldade ou, noutras ocasiões e em resposta a determinada dúvida colectiva, eu exponha e esclarecia no quadro os respectivos conceitos e/ou procedimentos. Sempre que possível, procurava sentar-me ao lado dos alunos, tentando assim criar um espaço de aprendizagem descontraído e aprazível, no qual estes se sentissem à vontade para experimentar, questionar, enfim, para aprender.

---

[10] Excepcionalmente, aquando da realização da investigação, o tempo dedicado à sala de estudo foi aproveitado, por coincidir com a disponibilidade dos alunos, para a realização de entrevistas pessoais, tendo a docente Lourdes Ventura assegurado a respectiva sala de estudo.

Para além de trabalhar de forma linear as dúvidas levantadas pelos alunos, procurei também aproveitar este espaço para contribuir, na medida do possível, no sentido de melhorar algumas das suas dimensões menos conseguidas, nomeadamente a sua autonomia e a sua visão geral dos conceitos matemáticos. Com efeito, e após ter verificado que os alunos se queixavam, com alguma frequência, de não conseguirem resolver individualmente determinados exercícios, embora tivessem percebido a sua forma de resolução quando esta lhes tinha sido exposta, decidi aproveitar algum do tempo disponível na sala de estudo para trabalhar no sentido da promoção da sua autonomia. Adicionalmente, também me apercebi que os alunos encaravam muitas vezes os exercícios como entidades isoladas, destituídas de fundamento conceptual. Neste sentido, tentei, por exemplo, incentivá-los a olhar de forma crítica para os exercícios, a estabelecer padrões e correlações e a sistematizar os conceitos envolvidos. Tentei responder às suas perguntas com outras perguntas. Por oposição à forma com habitualmente encaravam um determinado exercício de aplicação de conhecimentos, através de procedimentos pré-definidos e estanques, insisti na inter-relação dos conhecimentos envolvidos, na escolha crítica dos processos a utilizar e no questionamento da validade dos resultados obtidos.

Este espaço constituiu uma mais-valia para o meu estágio profissional. Com efeito, a existência dum momento menos estruturado com os alunos, permitiu-me, de forma mais descontraída, explorar e aperfeiçoar dimensões trabalhadas no estágio, como por exemplo a postura, o posicionamento perante a turma e a condução das aulas. Por outro lado, representou igualmente um desafio, no sentido de conseguir manter, no seio desse momento menos estruturado, uma postura de coerência e de rigor, quer ao nível da linguagem utilizada, quer ao nível dos conteúdos explorados.

A sala de estudo, tal como ocorreu com as aulas leccionadas sem a presença da orientadora, constituiu um importante momento de leccionação individual. Com efeito e segundo o meu ponto de vista, estes momentos pedagógicos assumiram uma importante função simuladora das condições normais de leccionação de um docente, estabelecendo assim uma ponte entre o espaço de formação e a futura função lectiva. E estas oportunidades tiveram a vantagem de ocorrer num ambiente protegido e aberto à discussão e reflexão, ampliando assim a sua função formadora.

No que concerne aos alunos, eles respeitaram este espaço de aprendizagem, mantendo a sua assiduidade e empenho. Creio que a sala de estudo resultou num contributo real para o normal desenvolvimento dos seus conhecimentos e das suas capacidades, ao longo do ano lectivo, cumprindo assim com o principal objectivo com o qual me tinha comprometido.

7.4. Avaliação

Neste ponto descrevo a minha participação em actividades de avaliação, ao longo do estágio pedagógico. Ela consistiu sobretudo na elaboração de questões específicas para avaliação dos conteúdos leccionados, na concepção e correcção de testes de avaliação sumativa e na elaboração de folhas para registos e observações de atitudes e conhecimentos dos alunos nas aulas. As dimensões trabalhadas em cada uma destes elementos, encontram-se explicitadas nos pontos abaixo.

7.4.1. Material para os testes de avaliação sumativa

Ao longo do estágio pedagógico, imaginei e concebi dois exercícios para avaliação de conhecimentos. Os exercícios consistiram em questões designadas por questões de escolha múltipla, versaram conteúdos por mim leccionados e integraram os respectivos testes de avaliação sumativa. Com estes dois exercícios tentei sobretudo avaliar a compreensão dos alunos relativamente a alguns aspectos conceptuais, aos quais dei particular ênfase nas aulas leccionadas.

Os exercícios podem ser consultados no dossiê de estágio. Para cada um deles foram elaboradas duas versões, tantas quantas as versões de testes de avaliação sumativa elaboradas pela docente Lourdes Ventura. O primeiro exercício foi concebido no âmbito do grupo de aulas leccionado em Janeiro, sob o tema *Intersecção de planos e interpretação geométrica*, e pretendeu avaliar precisamente os conhecimentos dos alunos relativamente à interpretação geométrica da intersecção de três planos[11]. Por sua vez, o segundo exercício foi elaborado no âmbito do grupo de aulas leccionado em Fevereiro, sob o tema *Operações com funções*, e pretendeu avaliar os conhecimentos dos alunos relativamente à interpretação geométrica da adição de duas funções, a partir da representação de partes dos respectivos gráficos. Em ambos os casos, a grande maioria dos alunos respondeu correctamente às questões propostas, revelando, assim, um elevado nível de aquisição/interiorização dos conteúdos trabalhados.

[11] As situações abordadas foram: três planos paralelos entre si, dois planos paralelos e um terceiro concorrente aos dois primeiros e três planos que se intersectam dois a dois segundo rectas paralelas.

7.4.2. Concepção e correcção de testes

Para além da elaboração de questões específicas para testes, descrita no ponto anterior, participei ainda na concepção e correcção de alguns dos testes de avaliação sumativa realizados ao longo do ano lectivo.

Relativamente à concepção de testes, participei na respectiva pesquisa e selecção de exercícios, integrada no grupo de docentes que leccionavam o 11º ano de escolaridade, constituído pela orientadora Lourdes Ventura e por outra docente da escola. Trabalhámos em equipa reflectindo, discutindo e analisando a forma mais adequada e equilibrada de avaliar os conhecimentos dos alunos.

Efectuei a correcção dos testes de cerca de metade dos alunos da turma de cada um dos dois testes intermédios realizados a nível nacional, pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) do Ministério da Educação, o primeiro a 29 de Janeiro e o segundo a 7 de Maio de 2009. Após alguma ponderação no núcleo de estágio, concordámos em aproveitar a existência destes testes e dos respectivos critérios de correcção para me iniciar nesta tarefa. Assim, e após analisar atentamente todos os critérios e indicações presentes nos respectivos testes, efectuei a sua correcção com o maior rigor e equidade que me era possível. Solicitei algumas vezes a ajuda da orientadora para o esclarecimento de dúvidas surgidas e participei ainda em reuniões para aferição das diferentes formas de interpretação dos critérios de correcção, no grupo de docentes que leccionavam o 11º ano de escolaridade.

Destas duas actividades, aquela em que senti maiores dificuldades, foi a de correcção de testes, apesar de neste caso até ter beneficiado da pré-existência de cotações e de critérios de correcção para as perguntas. No entanto, este é um trabalho que exige muita responsabilidade e profissionalismo e muitas das minhas dúvidas surgiram exactamente da preocupação com a uniformidade e a justiça de critérios. Creio que será apenas com a futura experiência profissional, que ganharei maior confiança e segurança neste capítulo.

7.4.3. Registos e observação de aulas (atitudes/conhecimentos)

O aspecto relativo à observação e à construção de registos respeitantes quer à aquisição de conhecimentos, quer ao comportamento dos alunos não foi muito explorado por mim no estágio pedagógico. Creio que este facto ficou a dever-se à inexistência de uma necessidade real de avaliação dos alunos, por parte de um professor estagiário. Com efeito, e aquando da leccionação das aulas no início do mês de Abril sem a presença da orientadora (ver ponto 7.2), esta necessidade de avaliação tornou-se mais evidente, uma vez que assumi, então, a responsabilidade total pelo bom funcionamento das aulas, não só perante mim própria, como perante outrem. Nesta altura, tornou-se inevitável a construção, no meu caderno de apontamentos, de algumas tabelas para registos de informações. Assim registei alguns dados relacionados com o comportamento na aula, com o trabalho aí realizado e com o aproveitamento auferido.

Julgo que no futuro, esta necessidade surgirá naturalmente com a experiência quotidiana e com o compromisso com uma avaliação justa e rigorosa. Assim, e para além dos itens já referidos, creio ser importante vir igualmente a considerar aspectos como a realização dos trabalhos enviados para casa, apresentação do material necessário, a organização do caderno diário, a participação nas aulas e as competências metodológicas evidenciadas, entre outros. Esta breve experiência resultou, sobretudo, numa maior tomada de consciência para a necessidade de realização futura de observações mais formais e metódicas.

8. *Actividades dinamizadas*

Neste ponto apresento todas as actividades extra-curriculares por mim dinamizadas ao longo do ano lectivo, conforme cada ponto seguinte.

8.1. Concurso didáctico com recurso a tecnologias de informação e comunicação

No dia 18 de Dezembro desenvolvi com os alunos uma actividade didáctica sob a forma de concurso, com recurso ao programa *Derive*. A decisão da realização desta actividade prendeu-se com a conjugação de dois aspectos: a realização de uma actividade lúdica, ideal para ser desenvolvida no último dia de aulas, antes das férias de Natal e a aprendizagem por parte dos alunos de uma nova e útil ferramenta informática, a ser utilizada posteriormente. Com efeito, e segundo me confidenciou a orientadora, no último dia de aulas do período, os alunos encontram muito pouca motivação e concentração para trabalhar dentro de uma sala de aula. Já só pensam na época festiva que se avizinha e normalmente solicitam aos professores que os libertem da aula muito antes do seu término. Ao ter conhecimento deste facto, idealizei logo a realização de uma actividade lúdica, que os motivasse e entusiasmasse e que, simultaneamente, lhes proporcionasse um espaço de consolidação de conteúdos matemáticos trabalhados anteriormente. O meu objectivo era criar uma actividade lúdica e descontraída, através da qual os alunos "brincassem" com conceitos matemáticos, apreendendo-os. Por outro lado, e quase simultaneamente, encontrava-me a preparar as primeiras aulas para serem supervisionadas pelos responsáveis científicos da FCT-UNL, agendadas para o início do segundo período. Para essas aulas, cujos conteúdos versavam a intersecção de planos e respectiva interpretação geométrica, havia considerado interessante a utilização do programa *Derive*, em virtude das suas potencialidades de visualização e de manipulação de objectos matemáticos representados no espaço, e do qual havia tido conhecimento na Universidade. Deste modo, ocorreu-me construir a actividade lúdica pretendida com base neste *Software*, proporcionando aos alunos um primeiro contacto com esta ferramenta, de forma a facilitar o seu manuseamento e a libertá-los para os desafios exclusivamente matemáticos a apresentar nas futuras aulas no mês de Janeiro.

Pelo facto da actividade ter sido preparada para se desenrolar em cerca de uma hora e meia (a totalidade de um tempo lectivo), foi necessário fazer uma apresentação prévia do programa *Derive*. Assim, na aula do dia anterior, dia 17 de Dezembro, efectuei uma introdução à aplicação, incidindo sobretudo nas suas funcionalidades básicas e nas funcionalidades mais especificamente necessárias à concretização da actividade do dia seguinte. Elaborei igualmente um pequeno manual de utilização do programa *Derive*, no qual resumi as informações e procedimentos essenciais. Com o manual, que foi distribuído aos alunos no final desta aula, pretendi construir uma ferramenta de apoio, que lhes permitisse, sobretudo, um grande nível de iniciativa e de autonomia na pesquisa e na identificação dos procedimentos necessários à concretização dos desafios propostos. O material relativo a esta actividade pode ser encontrado no dossiê de estágio. Ele compreende as planificações das aulas, a ficha de trabalho com a actividade proposta, a respectiva resolução e ainda o referido *Manual de Instruções Básicas*.

A actividade lúdica foi concebida com o intuito de proporcionar aos alunos um complemento visual e dinâmico de alguns conceitos matemáticos construídos em aulas e/ou anos anteriores, tais como: equação de um plano que passa por três pontos não colineares; secções feitas num cubo; intersecção de um plano com os eixos coordenados; propriedades do produto escalar de dois vectores; condição que define uma esfera; Teorema de Pitágoras no Espaço; e ainda investigação de diversas propriedades e relações geométricas.

A metodologia utilizada foi a de trabalho em grupo de três alunos, tendo cada grupo acesso a um computador. Como se tratava de um concurso, os alunos foram informados de que os elementos do primeiro grupo a terminar teriam direito a uma pequena lembrança. A actividade/concurso consistia no preenchimento de umas palavras cruzadas com o nome de quatro matemáticos responsáveis pelo estudo da Geometria Analítica. A letra a preencher em cada um dos espaços, poderia ser encontrada através de uma chave, através de uma correspondência com os resultados numéricos obtidos em cada um dos desafios matemáticos apresentados.

Os trabalhos decorreram de forma muito entusiasmante. Os alunos empenharam-se na resolução das tarefas propostas, não se preocupando em sair mais cedo da aula, aliás, nem se dando conta do passar do tempo. Queriam vencer os desafios e queriam ganhar o concurso! Assim, todos os grupos terminaram a actividade, nunca a abandonando, mesmo que surpreendidos pelo toque da campainha, que os alertou para a existência de mais um intervalo. Os alunos aplicaram os seus conhecimentos de forma desafiante e trabalharam com muito ritmo e entusiasmo, fazendo várias experiências, conjecturando, discutindo, descobrindo, construindo e brincando com a matemática. Muitas foram os

"Ahhh!", interjeições relativas à clarividência e compreensão de conceitos, ouvidos na sala de trabalho. O programa *Derive*, com as respectivas facilidades de visualização e manipulação, assim o potenciou. Havia alunos que pareciam ter finalmente esclarecido a natureza de determinados conceitos ou procedimentos, nomeadamente o Teorema de Pitágoras no espaço e a intersecção de planos com as faces do cubo ou com os eixos coordenados, enquanto outros recorriam destramente às evidências visuais para ratificar os raciocínios efectuados[12]. Criaram-se momentos ricos de reflexão sobre o que se obtinha no ecrã do computador. Os alunos foram levados a reflectir em relação a situações que dificilmente surgiriam no desenvolvimento de uma actividade semelhante com recurso apenas a papel e lápis.

Dois grupos concluíram a actividade quase em simultâneo, tendo ambos sido declarados vencedores e, consequentemente, tendo todos os seus elementos recebido uma pequena lembrança.

Como notas de reflexão pessoal, relativamente a aspectos a melhorar, gostaria de referir duas situações, cada uma respeitante a cada uma das aulas em que decorreu esta actividade. Assim, e relativamente à aula do dia 17 de Dezembro, a aula de apresentação do programa *Derive*, apercebi-me que me encontrava sobretudo preocupada em cumprir a planificação efectuada. No entanto, e numa aula desta natureza, em que se procede à exploração de um *software*, e que permite aos alunos a colocação de muitas dúvidas e sugestões, é necessário planificar uma aula menos rígida e mais interactiva. Com efeito, e tal como acabou por se verificar, creio que em aulas com estas características, é necessário apenas ancorar alguns pontos principais e imprescindíveis, permitindo espaço para exploração das sugestões e dúvidas dos alunos. No que concerne à actividade realizada no dia 18, não fui capaz de precaver uma situação de "fraude" na realização do concurso, pois concebi o preenchimento sequencial das letras relativas aos nomes dos matemáticos, o que permitiu que um dos grupos adivinhasse facilmente os nomes envolvidos, "forjando" assim a resolução de todos os desafios matemáticos correspondentes. Este factor deverá ser corrigido numa actividade semelhante a realizar no futuro.

Por solicitação da orientadora, ajudei também a realizar a actividade na outra turma de sua leccionação, tendo esta decorrido igualmente com muito sucesso. No final,

[12] Quando se solicitava, por exemplo, a representação de um cubo com centro na origem do referencial e aresta 4, muitos alunos consideravam inicialmente uma variação entre -4 e 4 de cada um dos eixos coordenados, emendando prontamente estes valores, uma vez visualizado o respectivo cubo e percebendo que neste caso a aresta assumia o valor de 8 unidades e não de 4, como o pretendido.

muitos foram os alunos que se me dirigiram a agradecer com contentamento e a desejar-me umas Boas Festas. O sucesso desta actividade superou claramente as minhas expectativas. Ao sair da escola nesse dia, não conseguia disfarçar um claro sorriso de satisfação.

8.2. Actividades integradas na semana da escola

A Semana da Escola é uma iniciativa que decorre anualmente na Escola Secundária Fernando Lopes Graça no final do segundo período. Durante três dias, são dinamizados, pela comunidade escolar, diversos tipos de eventos, como exposições, espectáculos musicais, conferências, encontros, laboratórios abertos, entre outros. Neste ano lectivo a semana da escola decorreu entre os dias 25 e 27 de Março.

No âmbito do meu estágio pedagógico, preparei algumas actividades para integrar o programa deste evento. Assim, organizei um concurso de desafios matemáticos, preparei material de divulgação e de construção de flexágonos, sugeri um tema para um trabalho a realizar pelos alunos e contribui, ainda, com o meu auxílio para a realização o Laboratório Aberto de Matemática. Nos pontos seguintes são descritos cada um destes aspectos da minha participação.

8.2.1. Apoio ao Laboratório de Matemática Aberto

O Laboratório Aberto de Matemática consiste num espaço no qual se podem realizar diversas actividades lúdico-didácticas ligadas a esta disciplina científica. Por ocasião da Semana da Escola, no laboratório, que funciona regularmente como sala de aula, são rearranjadas as mesas, são decorados os espaços interiores, são expostos trabalhos realizados pelos alunos e são preparadas actividades que convidam os alunos a divertir-se com a matemática. Os visitantes podem, por exemplo, jogar partidas de xadrez ou de hexa, explorar a construção de figuras com o Tangram ou de sólidos geométricos com o Polydron, realizar jogos matemáticos no computador e, este ano também, dedicar-se à construção de flexágonos.

Para que o laboratório fique operacional e disponível para receber os visitantes, é necessária a colaboração dos professores de matemática da escola. Assim, também eu, juntamente com a orientadora Lourdes Ventura, prestei o meu apoio à montagem e organização deste espaço, contribuindo, nomeadamente para a sua decoração, para a construção e selecção dos espaços lúdicos, para a preparação de jogos interactivos a realizar com recurso aos computadores e à aplicação ClicMat[13]. Para além da preparação do espaço também contribui com a minha presença no laboratório, em vários momentos ao longo dos três dias, de forma a receber e orientar todos os elementos da comunidade escolar que o visitaram.

No dossiê de estágio podem ser consultadas algumas fotografias relativas a este laboratório e que pretendem ilustrar não só a sua organização e decoração do espaço em si, mas também, e sobretudo a dinâmica de actividades aí conseguida.

8.2.2. Concurso de desafios matemáticos

Para integrar o Laboratório Aberto de Matemática, preparei um concurso de desafios matemáticos. Para tal seleccionei uma lista de desafios simples, de modo a que qualquer aluno da escola, quer do Terceiro Ciclo, quer do Ensino Secundário, a eles pudesse dedicar-se. O concurso foi composto por doze questões, cada uma delas exposta em cartolinas coloridas. No início de cada um dos três dias em que decorreu a semana da Escola, eram afixados quatro dessas questões numa parede do laboratório. Os alunos que aí se deslocavam eram desafiados a encontrar as suas soluções e a depositar diariamente, numa urna preparada para o efeito, as respectivas respostas. Junto às cartolinas com os desafios foram igualmente afixadas as regras do concurso.

Preparei folhas de respostas para os alunos apresentarem mais estruturadamente as suas conclusões e disponibilizei ainda folhas de rascunho, em que incluí alguns esquemas que julguei úteis à elaboração dos seus raciocínios. Todo o material produzido, assim como fotografias que ilustram as cartolinas elaboradas e a participação dos alunos, podem ser encontrados no dossiê de estágio.

Os alunos que visitaram o Laboratório de Matemática aderiram prontamente ao concurso, realizando mesmo algumas competições entre eles no sentido da "descoberta" das respostas. Apesar de ter, à partida, introduzido um factor de diferenciação entre os alunos dos dois níveis de ensino presentes na escola, pela decisão de atribuição de diferentes prémios para os vencedores de cada um desses níveis, verificou-se uma fraca presença no laboratório e consequentemente uma fraca participação no concurso dos alunos do Terceiro Ciclo do Ensino Básico. Assim, e no final dos três dias, verificava-se

[13] Aplicação da responsabilidade da Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular do Ministério da Educação e da Associação de Professores de Matemática.

sobretudo uma competição muito activa e salutar entre os alunos do Ensino Secundário, sobretudo os do sexo masculino.

Os alunos que participaram no concurso, muito apreciaram os desafios, que frequentemente constituíam tema das suas conversas quotidianas. Muitas foram igualmente as solicitações de que fui alvo, quer no sentido de lhes facultar pistas para a obtenção de respostas, quer no sentido de lhes confirmar a validade dos raciocínios efectuados.

8.2.3. Divulgação e construção de flexágonos

Com o intuito de dar a conhecer aos alunos algo de novo, preparei um conjunto de material relativo à construção de flexágonos[14], que foi instalado numa das mesas do Laboratório Aberto de Matemática. Assim, preparei um folheto de apresentação geral dos flexágonos, dois folhetos com instruções relativas à construção de flexágonos hexagonais, a duas e a três dimensões, recortes de papel com modelos previamente preparados para a sua construção e ainda material decorativo para os referidos modelos, de modo a tornar possível a visualização da "magia" dos flexágonos. Mais uma vez, todo o material referido pode ser encontrado no dossiê de estágio.

Com esta actividade pretendi atingir sobretudo dois objectivos: um com um tom mais transcendente e outro mais relacionado com o desenvolvimento da autonomia dos alunos. Assim, e em primeiro lugar, pretendi dar-lhes a conhecer este objecto simples e quase pueril, descoberto por um aluno universitário de matemática quando se entretinha a dobrar restos de papel, de forma a tentar transmitir-lhes uma mensagem do encorajamento e da perseverança a considerar em todos os caminhos educacionais da sua vida, mesmo que estes lhes possam parecer, à partida, desprovidos de potencial. Em segundo lugar, pretendi igualmente aproveitar esta oportunidade para trabalhar e melhorar os seus níveis de autonomia, uma vez que esse foi um dos aspectos que neles fui identificando como deficitários, ao longo do estágio pedagógico. E foi nesse sentido que elaborei os folhetos de instruções, de forma a serem consultados e seguidos autonomamente pelos alunos, para assim identificarem padrões, reconhecerem instruções e, desta forma conseguirem construir por eles próprios os flexágonos.

[14] Flexágonos são figuras planas que resultam da dobragem de tiras de papel divididas num certo número de figuras geométricas iguais e que quando dobradas de determinada forma, revelam faces escondidas.

Se a actividade de resolução de desafios matemáticos tinha sido preferida pelos alunos do sexo masculino, esta actividade foi a eleita das raparigas que passaram pelo laboratório e que assim se empenharam nos recortes, dobragens e colagens necessários à construção destes objectos. Os alunos mostraram interesse e curiosidade pela construção dos flexágonos embora, tal como temia, manifestaram algumas dificuldades em pesquisar informação e em construí-los de forma autónoma.

8.2.4. Proposta de trabalho para a exposição

Ao longo do ano lectivo verifiquei que, de forma recorrente, alguns alunos da turma pronunciavam o nome de alguns conjuntos numéricos, como se o traço vertical que se encontra frequentemente na sua representação correspondesse à letra "i". Assim, e por exemplo, era frequente ouvi-los pronunciar "i ene" e "i erre" quando desejavam referir-se, respectivamente, ao conjunto de números naturais e ao conjunto de números reais. Apesar de constantemente alertados para o equívoco, quer por mim, quer pela docente Lourdes Ventura, os alunos continuavam a insistir nesta forma de pronunciação. Pensei, então, que a melhor forma de ultrapassar esta dificuldade, seria esclarecer os alunos acerca da natureza real do traço vertical encontrado na notação, mas como também desconhecia a sua origem, lancei-me numa actividade de pesquisa. Após a consulta de vários livros de referência, quer da história dos números, quer da história da notação matemática, não me foi possível encontrar qualquer menção à origem desta forma de escrita dos conjuntos numéricos. Já na internet consegui aceder a alguma informação relevante, nomeadamente através da consulta de um livro editado pela Oxford University Press[15] e através de outros sítios electrónicos como o da universidade norte americana de Cornell[16].

[15] Livro *A plain TEX primer***,** Malcolm Clark, Oxford University Press

[16] Baseando-me na informação recolhida foi possível descortinar a origem dos "traços verticais" frequentemente visíveis na notação dos conjuntos numéricos: como a tradicional forma de representação dos conjuntos numéricos através de letras maiúsculas a negrito (bold) apresentava dificuldades de reprodução com o giz, no quadro negro, começou-se a convencionar reproduzir o aspecto de negrito através da substituição de alguns traços por duplos traços; progressivamente esta forma de escrita para o quadro foi sendo adoptada para textos escritos (as primeiras referências parecem remontar a meados dos anos sessenta do século XX, em textos da universidade de Princeton, nos EUA), tendo sido desenvolvida uma nova fonte para a representar: a fonte designada por *Blackboard bold* ("negrito para quadro negro") ou também conhecida por *Double Struk* (alusão à forma da nova fonte, como se esta resultasse de uma "dupla batida" na máquina de escrever – letra duplamente introduzida com um ligeiro desvio, conforme esquema representativo de introdução de letras com desvio decrescente: 

)

Se primeiramente tinha pensado recolher toda a informação necessária e transmiti-la aos alunos, logo tornou-se evidente o maior benefício que para eles resultaria, se fossem os próprios a pesquisar esta informação, a organizá-la e a transmiti-la aos colegas. Assim, e aproveitando o facto de a orientadora lhes ter previamente solicitado a realização de um trabalho de grupo para expor por ocasião da semana da escola (sob o tema das cónicas), e o facto de existirem repetições de temas por entre os grupos, sugeri à docente Lourdes Ventura a substituição do tema de trabalho de um dos grupos por este tema relativo à natureza da notação dos conjuntos numéricos. A sugestão foi bem aceite e comunicada ao grupo que a iria explorar, tanto verbalmente como por escrito.

Uma cópia do documento entregue aos alunos do grupo pode ser encontrada no dossiê de estágio. Nele é explicitado o objectivo do trabalho, bem como alguns dos conteúdos que ele deveria integrar e algumas pistas a serem exploradas.

Infelizmente, e apesar de, em conversas de trabalho, os alunos terem demonstrado estarem a efectuar pesquisas na direcção correcta, estes acabaram por apresentar um simples trabalho de exposição dos conjuntos numéricos, no qual figurava apenas a indicação de alguns dos números que os constituem e algumas referências à origem dos seus nomes. Foi com desapontamento que verifiquei que o trabalho não apresentava qualquer referência à natureza da notação dos conjuntos apresentados. Ao confrontar os alunos com o não cumprimento dos objectivos propostos, eles pareceram não conferir muita importância ao facto, demonstrando terem optado pelo caminho mais fácil e não revelando quaisquer problemas de consciência, uma vez que, no seu entender, tinham cumprido com o solicitado e apresentado "um" trabalho!

Face ao facto de o objectivo de transmissão aos alunos da natureza da notação utilizada na representação dos conjuntos numéricos ter sido completamente falhado, tomei logo uma resolução de apresentar eu própria um trabalho numa cartolina, relativo ao tema solicitado. Com este trabalho pretendi sobretudo integrar duas componentes: uma a apresentação da informação pretendida e consequente esclarecimento dos alunos quanto à notação e pronunciação do nome dos conjuntos numéricos; e outra relativa à forma de construção e de exposição de informação em cartazes de parede. Com efeito, e face aos vários trabalhos apresentados pelos alunos, verifiquei a existência de algum desconhecimento de certas regras de bom senso para uma apresentação eficaz de informação, nomeadamente, a não utilização de texto compacto, o recurso a letras de grande tamanho e a utilização de esquemas ilustrativos. Assim, e para além de lhes ter realçado verbalmente estes aspectos, julguei possuir um maior carácter pedagógico a apresentação de um cartaz que contemplasse essas premissas.

Elaborei então um cartaz numa cartolina que levei para a sala de aula na última semana lectiva. Apresentei-lhes e expliquei-lhes a informação relevante e discutimos e explorámos conjuntamente os vários aspectos técnicos considerados aquando da sua construção. No dossiê de estágio podem ser encontradas fotografias relativas aos trabalhos referidos neste ponto: os trabalhos realizados pelos alunos sobre as cónicas e os dois trabalhos respeitantes à notação dos conjuntos numéricos (o trabalho realizado pelos alunos e o realizado por mim).

8.3. Seminário para professores

Devido ao interesse manifestado pelos professores de Matemática da escola em conhecer o programa *Derive*, por mim utilizado em actividades e aulas ao longo do ano lectivo, disponibilizei-me para lhes proporcionar uma pequena apresentação deste *software* e das suas potencialidades. Esta apresentação decorreu sob a forma de seminário no dia 4 de Março.

A apresentação do programa informático decorreu em moldes muito semelhantes à realizada para os alunos no final do primeiro período (ver ponto 8), tomando partido do material então elaborado. Deste modo, o seminário foi iniciado por uma apresentação geral do programa *Derive*, incluindo algumas demonstrações de funcionalidades básicas, sobretudo respeitantes a operações de cálculo simbólico, como simplificação de expressões, resolução de sistemas e determinação de limites. Foram ainda sublinhadas as potencialidades de visualização no espaço disponibilizadas por este programa. Seguidamente foi distribuído pelos professores o *Manual de Instruções Básicas* por mim elaborado e a ficha relativa ao concurso didáctico apresentado aos alunos, para que estes pudessem explorar as actividades aí propostas e se familiarizassem com a aplicação.

Os professores trabalharam em grupos de dois elementos. Tentei esclarecer as suas dúvidas no que respeita à utilização do programa. Muitas foram as questões levantadas, mas também muitas foram as descobertas efectuadas e as ideias surgidas para futuras utilizações do programa com os respectivos alunos.

A planificação deste seminário encontra-se no dossiê de estágio. O seminário contou com a presença significativa dos professores de Matemática da escola, inclusivamente dos professores do horário nocturno, tendo igualmente contado com a participação de uma professora de Matemática de uma escola secundária vizinha. Correu de uma forma muito aprazível e colaborativa. No final os professores mostraram-se satisfeitos com o enriquecimento dos seus conhecimentos, tendo alguns deles solicitado a disponibilização das diversas fichas de trabalho por mim elaboradas com recurso ao programa, para possíveis utilizações futuras.

8.4. Seminário para alunos

Convidei um engenheiro mecânico meu conhecido, responsável em Portugal por uma empresa multinacional petrolífera, na área do abastecimento de combustíveis nos aeroportos, para realizar um seminário dirigido aos alunos, sob o tema Segurança no Trabalho. A ideia surgiu-me por me ter apercebido que os alunos reclamavam frequentemente de certos "imponderáveis" que lhes ocorriam, quando estes, muitas vezes, apenas ficavam a dever-se à sua dificuldade de tomada de consciência das consequências dos seus actos e dos objectivos a que se propõem. Deste modo, com a vinda à escola deste engenheiro, possuidor de uma personalidade assertiva e pragmática e com formação superior no âmbito da Higiene e Segurança no Trabalho, pretendia que, através do relato das suas experiências, passasse (não de uma forma prescritora ou paternalista mas de um modo natural, lúdico e incisivo) uma mensagem de prevenção, planeamento, pro-actividade e responsabilização, todos estes factores, no meu ver, muito úteis aos jovens estudantes nesta faixa etária. O facto de se encontrar ligado à aviação também constituiu um dos factores que influenciou a sua escolha, uma vez que esta é uma área que, normalmente, apaixona os jovens[17].

No entanto e infelizmente, após algumas reuniões de trabalho para preparação conjunta dos conteúdos do seminário e após o interesse de outros professores e alunos da escola em partilhar das suas experiências, acabou por não ser possível a deslocação deste técnico à escola no dia agendado, por compromissos profissionais de última hora. Apesar de várias tentativas para realizar este seminário numa outra data, tal acabou igualmente por não ser possível, ora por sua indisponibilidade, ora por indisponibilidade da escola. Ficou sobretudo a ideia, a ser aplicada numa futura oportunidade.

[17] Na turma encontravam-se alguns alunos que manifestavam o desejo de enveredar pela área da engenharia, nomeadamente da engenharia mecânica, e que se mostravam muito interessados em aferir, pelo testemunho do orador, qual seria o quotidiano de um profissional desta área.

9. Colaboração na direcção de turma e participação em reuniões: Conselhos de Turma e reuniões com Encarregados de Educação

Ao longo do ano lectivo, colaborei, em várias ocasiões, com a orientadora Lourdes Ventura, no que diz respeito ao trabalho relativo à sua direcção de turma. Assim, auxiliei-a na elaboração de alguns documentos e participei activamente em Conselhos de Turma e em reuniões com os Encarregados de Educação. Devo confessar que estes procedimentos inerentes à docência eram para mim totalmente desconhecidos e que, portanto, esta participação revelou-se muito útil e instrutiva.

No que concerne aos Conselhos de Turma, gostaria de expor algumas das notas positivas que assinalei. Assim, apercebi-me da grande importância destas reuniões pela oportunidade que os professores aí possuem para "redescobrir" os seus alunos pelo olhar dos seus colegas. Com efeito, a informação recolhida nos Conselhos de Turma, oferece ao professor uma oportunidade para repensar quer a sua postura geral na turma, quer a sua postura perante algum aluno específico. É que, conforme me foi clarividente, as atitudes e o comportamento dos alunos na sala de aula dependem em grande parte da nossa própria postura e comportamento. Adicionalmente, os Conselhos de Turma constituem um importante espaço para conhecer um pouco das histórias pessoais dos alunos o que constitui uma mais-valia no processo de organização das intervenções pedagógico/didácticas de um professor. Os Conselhos de Turma constituem ainda espaços privilegiados para o debate de ideias e de soluções pedagógicas concertadas, com vista a uma evolução desejavelmente positiva dos percursos escolares e académicos de todos os elementos da turma.

Por seu turno, as reuniões com os encarregados de educação também se revelaram de muita importância não só pelo seu contributo para o conhecimento integral dos alunos da turma, como também pelo debate de ideias e de soluções educativas que proporcionaram. Creio serem realmente estas as duas dimensões mais relevantes destas reuniões.

No caso da minha turma de leccionação, os encarregados de educação dos alunos mostraram-se pessoas muito informadas e interessadas em contribuir activamente para a melhoria dos percursos escolares dos filhos. Entre outros temas abordados, foram discutidas possibilidades de solução para uma certa apatia e desinteresse verificado na turma e para o respectivo reflexo na maioria das avaliações quantitativas dos seus elementos. Efectivamente, nas reuniões com os Encarregados de Educação verificava-se um verdadeiro ambiente de diálogo e de cooperação, num quadro de partilha da responsabilidade pela educação e pela formação integral dos jovens alunos.

Quanto a mim, que inicialmente possuía um certo desconhecimento relativamente à necessidade real da existência destas reuniões, acabei por interiorizar claramente a sua importância e pertinência, chegando mesmo a nelas intervir activamente, sempre que julgava adequado, tentando, através da minha experiência profissional e educativa, prestar o meu contributo para a resolução de certas lacunas identificadas na turma.

10. *Participação em actividades da escola*

Para além das actividades previamente assinaladas neste relatório, tive ainda a oportunidade de colaborar com colegas e participar noutros eventos escolares, como em seminários e conferências e ainda num espectáculo de dança que envolveu os funcionários da escola. Este capítulo dá conta destas minhas colaborações adicionais.

10.1. Colaboração com colegas

O ambiente vivido na Escola Secundária Fernando Lopes Graça era, como já o relatei, um ambiente salutar de convívio e de cooperação. Como tal, no decurso de trocas de impressões e de conversas quotidianas, surgiram variadas oportunidades de colaboração com os colegas, às quais tive toda a satisfação em aceder. Gostaria de referir, por exemplo, o apoio que me foi solicitado relativamente a dúvidas de utilização de *software* e de tecnologias informáticas (como no caso da utilização do quadro interactivo) e à disponibilização de material pedagógico/didáctico ou ainda à disponibilização dos meus modelos de planificações de aulas. No sentido inverso, gostaria igualmente de destacar o empréstimo de livros ou ainda o auxílio na utilização de funcionalidades do quadro interactivo que desconhecia.

10.2. Participação em seminários e conferências

Por ocasião da Semana da Escola realizaram-se vários seminários e conferências, aos quais tive o prazer de assistir e/ou participar, conforme informo nos pontos seguintes.

10.2.1. Palestra com antigos alunos da escola

A docente Lourdes Ventura e uma docente da disciplina de Físico/Química da escola, organizaram uma palestra para a qual convidaram três antigos alunos da escola como oradores. A palestra era, sobretudo, dirigida aos alunos pertencentes às direcções de turma das duas docentes (por questões que tinham que ver com limitações de espaço) e tinha como principal objectivo a troca de ideias e de experiências entre os actuais e os antigos alunos da escola, estes últimos, actualmente a frequentar o ensino universitário.

A palestra decorreu num ritmo muito vivo e animado, verificando-se existir uma relação muito próxima no que diz respeito a interesses, receios e expectativas, entre os dois grupos de alunos. Foi passada uma mensagem de necessidade de trabalho e de empenho académico desde o ensino secundário, de modo e preparar a entrada num ensino mais exigente e impessoal como é, geralmente, o ensino universitário.

A reter sobretudo desta palestra a grande proximidade etária e de vivências, verificada entre oradores e audiência, a qual resultou muito bem no que diz respeito à compreensão e interiorização da mensagem transmitida.

10.2.2. Sessão com a Psicóloga do Serviço de Psicologia e Orientação

Por iniciativa da docente Lourdes Ventura realizou-se um encontro entre a psicóloga do Serviço de Orientação e Psicologia da escola e os alunos da turma, com o objectivo de os esclarecer acerca das opções relativas aos seus futuros percursos académicos.

Foram apresentadas várias universidades e institutos, os respectivos cursos leccionados, as condições de acesso requeridas para cada curso, tanto a nível de classificações, como a nível de realização de provas específicas e ainda as respectivas saídas profissionais. A sessão foi muito apreciada pelos alunos que, por vezes, pareciam estar apenas nesse momento a estabelecer um primeiro contacto com esta realidade.

A sessão foi muito participada por todos os intervenientes, gerando-se um ambiente de franca troca de ideias e de esclarecimento de dúvidas. Os alunos interessaram-se sobretudo por tentar perceber as implicações a nível prático e de vida quotidiana da escolha de determinados estudos e consequentemente de profissões. Da minha parte, também participei activamente na sessão, prestando prontamente o meu contributo, expondo alguma da minha experiência e do meu percurso académico e profissional, tentando motivar especialmente os alunos para uma escolha informada e em consciência, e que vá o mais possível de encontro às suas potencialidades e aos seus desejos pessoais.

Creio que acções como esta, em que estabelece uma correspondência entre o presente percurso académicos dos jovens e as suas aspirações e possibilidades concretas de construção de um futuro profissional, são de extrema utilidade, podendo o seu efeito reflectir-se no empenho com que estes se dedicam e comprometem nos seus estudos.

10.2.3. Conferência “ A Actividade Científica em Matemática”

O professor Luís Sanchez, coordenador do Centro de Matemática e Aplicações Fundamentais da Faculdade de Ciências de Lisboa, foi convidado por um professor de Matemática da escola para realizar uma conferência sob o tema “A actividade Científica em Matemática”.

Eu e a professora Lourdes Ventura, em conjunto com os alunos da turma de leccionação assistimos a esta conferência. O professor convidado apresentou um pouco dos procedimentos gerais da investigação científica, impressionando os alunos com o número elevado de publicações científicas existentes, tal como de artigos científicos submetidos e publicados num determinado espaço de tempo. O professor dedicou igualmente uma parte significativa da sua apresentação à descrição do trabalho efectuado por um cientista num dos seus dias e numa das suas semanas típicas. Mais uma vez, os alunos apreciaram muitíssimo a referência à vida real e quotidiana de um profissional. Esta conferência, cujo tema, à partida, poderia parecer tão distante da vida e dos interesses dos alunos, acabou por ser seguida com muita atenção por parte destes.

A reter deste conjunto de encontros e conferência é o elevado interesse manifestado pelos alunos na ligação a estabelecer entre a sua vida actual de estudantes e a sua vida futura como profissionais activos. Creio que uma das ilações mais importantes a tirar é que para um docente, para além de transmitir os conhecimentos técnicos, é também importante transmitir um pouco da sua experiência de vida, de modo a que os alunos consigam começar a construir esta ponte entre presente e futuro e que, assim, se vão formando e constituindo como futuros membros activos da sociedade.

10.3. Participação no espectáculo “Danças do mundo”

Os professores de Educação Física da escola organizaram um espectáculo de dança, aberto à participação de todos os funcionários da escola, docentes e não docentes. Foi-me lançado o desafio de participar no espectáculo por uma dessas professoras, já minha conhecida, o qual resolvi aceitar. Participei activamente nos ensaios, que constituíam verdadeiros momentos de convívio e de boa disposição. Preparámos e ultimámos duas coreografias simples, mas, infelizmente e por razões de ordem pessoal, não me foi possível deslocar à escola no dia da apresentação do espectáculo. Fiquei com muita pena. Soube posteriormente que o espectáculo tinha sido muito bem conseguido.

11. *Reflexões finais e conclusões*

Ao iniciar o estágio pedagógico e possuidora, como referi, de algum à-vontade quer relativamente aos conteúdos a abordar, quer relativamente ao enfrentar de uma audiência, não possuía a verdadeira dimensão de todas as particularidades inerentes ao trabalho lectivo de um docente. Digamos que, apesar de já possuir, à partida, uma grande consciência dos contornos da profissão a que me propunha, não era tão claro para mim, um certo espírito de missão, um compromisso permanente com o rigor e o profissionalismo de que o docente não pode nunca se alhear. Como um exemplo deste reforçar de consciência, referiria a questão do rigor na linguagem corrente utilizada, para o qual não possuía tanta sensibilidade à partida e que fui progressivamente corrigindo e optimizando. Neste como noutros aspectos (interacção com os alunos, organização e dinamização da sala de aula, atenção ao rigor científico, entre outros) creio que apresentei uma evolução global francamente positiva ao longo do estágio pedagógico. Sinto-me agora claramente mais preparada e muito mais desperta para os variados contornos e dimensões científico/pedagógicos que se colocam quotidianamente a um educador em matemática. O estágio profissional é realmente um instrumento pedagógico que permite estabelecer uma ponte fundamental entre um "saber fazer" teórico e racional e um "fazer" concreto e efectivo, fundamental a um educador.

Uma nota menos positiva do meu estágio, que gostaria de assinalar, reside no facto de o ter efectuado individualmente, sem a colaboração de um par pedagógico. Com efeito, creio que este poderia ter resultado numa experiência ainda mais enriquecedora e desafiante, se tivesse contado com a participação activa de um colega.

Para concluir, gostaria de realçar um dos grandes ensinamentos que interiorizei e retive com o meu estágio profissional: a grande importância em o professor se manter sempre atento a todos as dimensões da sala de aula, encontrando-se continuamente preparado para questionar as suas estratégias e compromissos e para encetar novos caminhos e aprendizagens, conforme isso se justifique. E esta permanente atenção e contínua evolução e aprendizagem do professor, deve ocorrer não só na fase da sua formação, como ao longo de toda a sua carreira. E sempre no melhor interesse da evolução escolar e pessoal dos seus formandos.

Parte II

Trabalho de Investigação

Índice Parte II – Trabalho de Investigação

Índice de Figuras

Parte II – Trabalho de Investigação

Índice de Quadros

Parte II – Trabalho de Investigação

Capítulo 1

Introdução

O presente capítulo pretende contextualizar o trabalho de investigação apresentado neste documento. Assim, são aqui apresentadas as motivações pessoais da investigadora e a pertinência do estudo realizado, assim como explicitados os respectivos objectivos. O capítulo é concluído pela apresentação da estrutura segundo a qual o trabalho se encontra organizado.

1.1. Motivações pessoais

O trabalho de investigação apresentado neste documento foi realizado no âmbito no estágio pedagógico realizado pela autora, integrado no Mestrado em Ensino da Matemática pela Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Este Mestrado, enquadrado no Processo de Bolonha, confere habilitação profissional para a docência da disciplina de Matemática para o 3º Ciclo e Ensino Secundário.

A autora, detentora de uma licenciatura em engenharia, realizada alguns anos antes e possuidora de alguma experiência profissional tanto em contextos empresariais e de investigação, como de ensino (ensino universitário e particular), denota pela actividade docente um especial prazer e interesse quer profissional, quer pessoal, decidindo-se, desta forma, pela orientação da sua carreira profissional nesta direcção. À autora, interessa-lhe sobretudo as várias dinâmicas e possibilidades envolvidas no processo de ensino-aprendizagem, sempre no sentido da potenciação de uma matemática de qualidade nos seus alunos.

Este trabalho de investigação insere-se portanto num contexto de formação inicial de professores, procurando responder aos novos posicionamentos e definições

imergentes do desafio de Bolonha. Com ele, a autora pretendeu estabelecer e solidificar as bases da sua própria formação profissional, no sentido de consubstanciar as suas futuras respostas às necessidades de formação inerentes à realidade contemporânea.
Ao analisar a eficácia de estratégias de ensino-aprendizagem por si implementadas do conceito de derivada, a autora privilegiou, sobretudo, uma componente reflexiva sobre a sua própria prática, não só assim pretendendo corresponder a estes desafios actuais, como também tentando lançar as bases para consistentes reflexões futuras, no sentido da sua desejada evolução contínua como profissional do ensino da Matemática.

1.2. Pertinência do estudo

A grande preocupação que é actualmente votada à melhoria da formação dos alunos, sobretudo no sentido da construção de indivíduos socialmente válidos e competentes (de que é exemplo a preocupação que tem sido dedicada à diminuição dos níveis de iliteracia) tem, inevitavelmente, lançado um debate mais aprofundado sobre os contornos dos processos educativos formais e sobre o papel que o professor neles desempenha. Com efeito, o desejável desenvolvimento consistente dos indivíduos e das correspondentes comunidades de um ponto de vista global e integrador, tem lançado nova ênfase sobre as importantes funções a desempenhar pelos espaços de formação, e muito particularmente pelo espaço escolar.

Neste sentido, Ponte (2002) afirma que "o ensino é mais do que uma actividade rotineira onde se aplicam simplesmente metodologias pré-determinadas", constituindo isso sim e simultaneamente, "uma actividade intelectual, política e de gestão de pessoas e recursos" (p. 5). Assim, o professor, no exercício da sua actividade profissional, enfrenta, necessariamente, um processo de reflexão, avaliação e de reformulação permanentes da sua própria prática. A exploração e integração dos vários contextos em que ela se desenvolve, não apenas curriculares, mas também políticos, sociais, culturais e ainda pessoais, promovem a compreensão das situações problemáticas identificadas e contribuem para uma construção informada e fundamentada de novas vias e soluções. Segundo o autor (p. 5), "um ensino bem sucedido requer que os professores examinem continuamente a sua relação com os alunos, os colegas, os pais e o seu contexto de trabalho".

Por outro lado, e como afirmam Serrazina e Oliveira (2002, p.40), "na sociedade plural em que se vive, caracterizada pela conflitualidade, incerteza e complexidade, os professores precisam de desenvolver uma prática reflexiva no sentido de transformar a sala de aula". Com efeito, estes profissionais enfrentam quotidianamente uma diversidade de contextos, situações e desafios, que tornam cada realidade escolar e cada experiência de ensino num caso único. A resposta a estes desafios, não se esgotando, de forma alguma, nem na transmissão exclusiva dos conhecimentos técnicos curriculares, nem na aplicação rígida das teorias da educação, não pode igualmente basear-se no simples bom senso e boa vontade destes responsáveis educativos. Para que se atinja o desejável desenvolvimento integral do aluno, a prática tem de ser inevitavelmente pautada por uma constante e consistente auto-análise que equacione todas as dimensões envolventes e que promova continuamente a optimização da dialéctica ensino-aprendizagem.

Vários têm sido os autores que, tanto a nível nacional como internacional, têm defendido o papel fundamental desta prática reflexiva dos professores na concretização de melhores aprendizagens. É o caso de Donald Schön, uma das referências neste campo. Schön (1987) afirma que o processo reflexivo é iniciado pelo reconhecimento e identificação de um problema e respectivo contexto e que da análise rigorosa que se lhe segue e que contempla, necessariamente, todas as "imagens, teorias, compreensões e acções" (p. 31), resultam novas visões e compreensões do problema. Segundo o autor, a construção reflexiva promove o desenvolvimento, no professor, daquilo que designa por *professional artistry* e que se traduz pela capacidade, competência e discernimento que estes profissionais vão adquirindo e que os vão dotando de meios consistentes para responder adequadamente à multiplicidade de situações e dilemas que enfrentam. Com efeito, os professores, através do pensamento reflexivo vão-se dotando de um conhecimento informado e sistemático, que lhes possibilita uma actuação profissional consciente e deliberada, liberta de comportamentos impulsivos e rotineiros (Brubacher, Case e Regan, 1994).

De referir que nem todo o pensamento sobre a prática poderá ser considerado reflexivo. Segundo Kemmis (1985), a reflexão deve verificar duas condições fundamentais: basear-se numa situação ou problema concreto e, sobretudo, ser orientada para a acção. Com efeito a reflexão só ganha significado relevante, se constituir um motor para o aperfeiçoamento da prática pedagógica e, em objectivo último, dos processos de aprendizagem. De igual forma, Stenhouse (1975) entende que o papel do professor investigador assenta no seu empenhamento para um questionamento sistemático do ensino, tendo por meta o seu desenvolvimento. O professor reflexivo explora criticamente os seus procedimentos, pensamentos, estratégias e valores, inseridos num contexto sociocultural específico, com o objectivo principal de proporcionar aos seus alunos melhores e mais consistentes oportunidades de formação.

As práticas reflexivas têm se assumido como uma importante ferramenta na formação dos professores em vários momentos profissionais. Com efeito, estas práticas podem desempenhar, nestes educadores, um papel essencial no desenvolvimento de novas formas de pensar, de problematizar as situações e de novas formas de actuação. Como afirmam Serrazina e Oliveira (2002), "há, através das práticas, um ganho na compreensão e esta compreensão pode fazer surgir um *insight* sobre o que significa ser professor" (p. 32). Em particular, o momento da formação inicial dos professores tem sido defendido por vários autores, como um dos momentos de eleição para o desenvolvimento das práticas de reflexão/investigação. Crawford e Adler (1996), por exemplo, salientam a importância dos professores estagiários assumirem um papel activo na sua própria aprendizagem, através da tomada de decisões, da experimentação de novas ideias, do questionamento e justificação das suas estratégias, da análise da sua prática e da avaliação dos seus resultados. Na mesma linha, Ponte, Matos e Abrantes (1998) enumeram algumas razões que justificam tais práticas: "(i) favorece a construção de um conhecimento relevante do ponto de vista da prática profissional; (ii) promove a compreensão do professor relativamente à sua própria aprendizagem através da investigação, o que possibilita a compreensão do mesmo processo nos alunos; (iii) desenvolve competências e valores decisivos como o espírito crítico e a autonomia dos professores face ao discurso das ciências humanas; e (iv) constitui-se como um paradigma transponível para o quadro de uma prática reflectida". Com efeito, o contacto dos professores com atitudes e procedimentos desejáveis, nesta fase tão fundamental e marcante da sua formação, promove uma integração destes valores de uma forma mais estruturante e alicerçada em bases mais sólidas. Como defendem os autores, estes professores encontram-se, assim, em melhores condições pessoais e profissionais para reproduzir, de uma forma mais responsável e consciente, uma prática reflectida e reflexiva ao longo da sua vida activa.

Em conclusão, podemos afirmar que "ensinar é mais que uma arte. É uma procura constante com o objectivo de criar condições para que aconteçam aprendizagens" (Serrazina e Oliveira, 2002, p. 35). O professor tem de analisar a situação concreta, atendendo às suas condições de produção de trabalho, considerando as especificidades dos alunos e entendendo o seu papel na formação pessoal e social destes últimos. Das decisões e escolhas do professor dependem, em grande medida, as oportunidades proporcionadas aos alunos. A tomada de decisões consciente que toma em linha de conta aspectos éticos e socioculturais, é um dos atributos do professor reflexivo e promove, indubitavelmente, a justiça social que se deseja.

1.3. Objectivos do estudo

O estudo realizado teve como principal objectivo a análise da eficácia das estratégias de ensino implementadas na leccionação de um conceito matemático, o conceito derivada. Inserido num contexto de formação profissional de futuros docentes, a este trabalho de investigação não interessava tanto uma simples verificação da apreensão dos conceitos envolvidos, mas e acima de tudo, uma análise sob um ponto de vista reflexivo, da forma como esses conceitos são apreendidos e dos factores que intervêm quer positiva quer negativamente nessa apreensão.

No sentido da concretização deste objectivo, foi seleccionada uma amostra de três alunos para uma observação mais cuidadosa e detalhada, de acordo com a categorização efectuada por Domingos (2003), no que se refere aos níveis de complexidade dos respectivos conceitos imagem manifestados. Cada aluno seleccionado foi inicialmente identificado com cada um dos níveis de complexidade descritos: *conceito imagem incipiente*, *conceito imagem instrumental* e *conceito imagem relacional*. Com esta forma de selecção da amostra, pretendeu-se não só analisar os modelos de aprendizagem num conjunto de alunos com características diversas, como também, e atendendo uma vez mais ao contexto de formação profissional envolvido, aferir da validade da escolha efectuada para cada um dos níveis descritos, no sentido de possibilitar um questionamento fundamentado relativamente a categorizações por vezes efectuadas por docentes no que se refere aos alunos com os quais trabalham no decurso da sua actividade.

1.4. Estrutura organizativa

Este trabalho encontra-se organizado em seis capítulos. O primeiro capítulo é dedicado a uma introdução ao estudo efectuado, nomeadamente no que respeita às motivações pessoais da autora e à respectiva pertinência e objectivos. No segundo é realizada uma revisão da literatura relevante, no que se refere sobretudo à aprendizagem dos conceitos abordados. Nos terceiro e quarto capítulos são apresentados todos os procedimentos inerentes ao estudo. Enquanto o terceiro capítulo é dedicado à apresentação do plano metodológico adoptado, com a descrição da abordagem utilizada, abordagem qualitativa, do cenário e participantes, dos procedimentos de recolha e de análise de dados e ainda da apresentação de algumas das limitações do estudo, no quarto é efectuada uma descrição pormenorizada da intervenção didáctica efectuada, incluindo nomeadamente uma descrição das aulas leccionadas no âmbito do estudo. A análise dos dados recolhidos e as correspondentes conclusões e reflexões são objecto, respectivamente dos capítulos cinco e seis. É através do conteúdo presente nestes capítulos que se pretende dar resposta aos objectivos propostos com esta investigação.

Capítulo 2

Revisão de literatura

Neste capítulo é apresentado um quadro de referência teórico relativamente ao trabalho investigação desenvolvido, com base na introdução do conceito de derivada. Assim e como as funções constituem os objectos sobre os quais as derivadas operam e se encontram construídas, este capítulo é iniciado pela revisão de alguma literatura relativa ao conceito de função. Seguidamente é abordado o conceito de derivada propriamente dito, incluindo igualmente dois conceitos intimamente ligados à sua construção, os conceitos de taxa de variação e de recta tangente a uma curva num ponto.

2.1. O conceito de função

Muitos têm sido os autores que nos têm revelado as dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem e interiorização do conceito de função. A génese destas dificuldades prende-se, muito frequentemente, como estes o defendem, com a forma como o conceito é introduzido e com os exemplos que primeiramente lhe são apresentados. Este facto é salientado por Ferrini-Mundi e Lauten (1993), que referem que, de uma maneira geral, os alunos pensam que as funções devem ser lineares ou, pelo menos, contínuas, regulares e definíveis por uma fórmula simples, aparentemente em consequência dos exemplos "modelo" que lhes são apresentados, normalmente constituídos por regras de correspondência simples e fáceis de detectar quando representadas graficamente (Leinhardt, 1990).

Vinner (1983, 1991) obteve resultados idênticos em estudos realizados com alunos dos 10º e 11º anos das escolas de Jerusalém. Este investigador aplicou um questionário a 147 alunos, considerados bons, a quem tinha sido ensinado o conceito de função usando uma abordagem moderna, segundo a qual uma função é uma correspondência entre dois conjuntos não vazios que faz corresponder a cada elemento do primeiro um e um só elemento do segundo. O inquérito era constituído por duas partes. Na primeira, na qual era questionado aos alunos o que entendiam por função, o investigador identificou quatro categorias de respostas: uma primeira onde os alunos (57%)

reproduziram a definição formal que lhes tinha sido ensinada, embora em alguns casos recorrendo a palavras e a imagens próprias e, por isso, muitas vezes de forma matematicamente imprecisa ou mesmo incorrecta; numa segunda categoria, os alunos (14%) consideraram que uma função era uma regra de correspondência bem definida, não considerando a possibilidade da existência de correspondências arbitrárias; na terceira categoria foram incluídos os alunos (14%) que consideraram que uma função é uma fórmula, uma equação ou ainda uma expressão ou manipulação algébrica; os restantes alunos ou não responderam ou apresentaram elementos como gráficos, diagramas ou símbolos (por exemplo “y=f(x)”) para definir uma função. A segunda parte do questionário era dedicada a questões que exploravam situações de funções arbitrárias ou de funções que exibiam descontinuidades. O investigador constatou que entre um terço a dois terços dos alunos consideraram que uma função tem de ser definida por uma regra. No caso por exemplo de uma correspondência arbitrária traduzida por um gráfico, estes alunos consideraram a existência de uma infinidade de funções, com a respectiva regra de correspondência a ser aplicada a cada elemento do seu domínio. Adicionalmente, e para alguns dos alunos, as funções que possuíam uma expressão analítica para as definir em todo os pontos do seu domínio à excepção de um, poderiam não ser consideradas funções. O investigador verificou ainda que dos 54% de alunos que haviam reproduzido a definição formal de função ou uma reformulação própria, apenas 34% a utilizaram na resolução destas situações funcionais.

Por seu turno, Clement (1989) salienta alguns erros de interpretação de gráficos de funções que representam situações reais. Quando confrontados, por exemplo, com o gráfico da figura 2.1, muitos alunos afirmaram que os dois carros Q e R se cruzavam no ponto de intersecção das duas curvas. No mesmo sentido, e ao solicitar aos alunos para traçarem um gráfico de velocidade versus tempo de uma bicicleta caminhando ao longo de

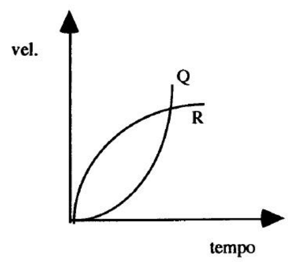


Fig. 2.1 - Gráfico da investigação de Clement (1989, p. 83)

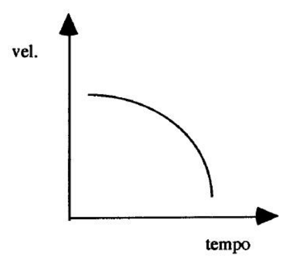


Fig. 2.2 - Gráfico da investigação de Clement (citado em Leinhardt et *al.*, 1990, p. 41)

uma montanha, muitos foram os alunos que traçaram um gráfico com a forma de uma montanha (figura 2.2). Com efeito, e como salientam Vinner e Dreyfus (1989), os alunos parecem conhecer a definição formal e abstracta de função, sendo razoavelmente capazes de a reproduzir quando solicitados, mas apresentam inconsistências quando têm de a aplicar a situações e a tarefas concretas.

Verifica-se frequentemente uma discrepância entre a definição matemática em si, o conceito definição que os alunos apreenderam e o conceito imagem que estes aplicam em situações concretas.

A forma como os alunos constroem o conceito de função é referida por alguns investigadores como organizada em estádios (Wagner e Parker, 1993). Assim, os alunos começam por considerar uma função como uma regra, um procedimento a aplicar a x; num estádio posterior concebem e manipulam a função sob as suas várias formas de apresentação (gráfica, tabular e simbólica); e num último estágio são capazes de a entender como uma entidade singular, um objecto matemático, com as suas propriedades e sobre a qual se pode operar. A dificuldade parece residir em deixar de considerar a função como apenas uma regra operacional e entendê-la como um objecto matemático (Dreyfus, 1990), ou, por outras palavras, em transitar de uma concepção operacional para uma concepção estrutural do conceito.

Como conseguir que os alunos construam representações mentais ricas dos conceitos, por oposição à aplicação mecanizada e estéril de uma série de algoritmos, regras e procedimentos?

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000) enfatizam a importância dos alunos analisarem diversos fenómenos do mundo real de modo a lhes proporcionar meios eficazes de lhes dar sentido aos conceitos matemáticos subjacentes. Neste capítulo, Selden e Selden (1992) sugerem especialmente a utilização de variáveis dependentes do tempo, tais como variáveis que traduzem movimento em função do tempo. Com efeito, e como o defende Janvier (1978), a análise de gráficos que traduzem situações reais, familiares aos alunos, pode constituir um factor decisivo na interpretação correcta de gráficos.

Em sentido semelhante, vários investigadores sugerem que o estudo do conceito de função deve ser iniciado tendo por base os próprios conhecimentos dos alunos, seguindo um percurso do mais global e intuitivo e para o mais formal e abstracto. É o caso de Sebastião e Silva (1977, citado em Ventura, 1997, p. 30) ao defender que "... a intuição precede geralmente a lógica, no processo de criação matemática. E o ensino deve respeitar esta ordem, se não quisermos abafar no aluno o espírito de pesquisa, obrigando-o a admirar passivamente (ou a detectar) uma construção acabada e perfeita". Também para Tall (1994), a intuição ajuda à formação nos alunos de representações mentais que servem de suporte à transição para pensamentos matemáticos mais elaborados e formais. De ressalvar, no entanto, o perigo de a intuição poder resultar em concepções erróneas, como ocorreu nos exemplos apresentados nas figuras 2.1 e 2.2.

Um ensino que envolva todas as representações de função, estabelecendo conexões reflectidas entre cada uma delas, promove igualmente a criação de desejáveis imagens mentais ricas nos alunos, potenciadoras, segundo alguns autores, de raciocínios matemáticos mais avançados. Domingos (1994, p. 38), por exemplo, afirma: " O uso de várias representações ajuda-os (aos alunos) a fazer a transição de uma compreensão concreta e limitada de um tópico, para outra mais abstracta e flexível".

Neste sentido, os recursos computacionais que exibem uma crescente preocupação pedagógica e funcional do ponto de vista do aluno/utilizador e que se assumem como veículos privilegiados de exploração dinâmica de imagens, conceitos e de respectivas interligações, podem também constituir elementos importantes na concretização de aprendizagens matematicamente ricas. Segundo Vinner (1989), as experiências visuais constituem uma base sólida para as noções algébricas e, como tal, estas últimas devem ser ensinadas através de interpretações visuais. Assim sendo e neste capítulo, os recursos computacionais podem assumir um papel primordial. Para Ponte (1991, p. 61), "o computador desempenha uma espécie de intermediário para a abstracção", pois os conceitos e os procedimentos matemáticos em ambiente computacional podem assumir uma dinâmica dificilmente obtenível por qualquer outra representação estática no quadro.

Paralelamente a estas propostas, Sfard (citada em Domingos, 2003), alerta para dois factores fundamentais na obtenção de sucesso em aprendizagens matemáticas: tempo e motivação. A variável tempo é por vezes subestimada, mas, para que um objecto matemático consiga revelar-se aos alunos, poderá ser necessário um longo período de incubação. Por seu lado, a motivação, necessária a qualquer processo de aprendizagem, assume um papel fundamental na aprendizagem desta ciência. Só os alunos verdadeiramente motivados conseguirão o empenho necessário para a construção e manipulação mental dos objectos matemáticos.

2.2. O conceito de derivada

A compreensão do conceito de derivada está, tal como referido para o conceito de função, intimamente relacionado com a forma como este é apresentado e trabalhado com os alunos. Num estudo realizado numa universidade na Turquia envolvendo 50 alunos de Engenharia Mecânica e 32 alunos de Matemática, Bingolbaldi e Monaghan (2008) encontraram evidências deste facto, ao analisarem o desenvolvimento conceptual de derivada com particular ênfase nos aspectos de taxa de variação e de tangente. Todos os alunos envolvidos haviam estudado derivadas no ensino secundário. Foram realizados pré-testes e pós-testes relativamente à leccionação dos respectivos cursos de Análise. O curso de Análise ministrado em Engenharia Mecânica deu particular ênfase a aspectos de taxa de variação dedicando-lhe muito mais tempo e muitos mais exemplos (133 minutos e 9 exemplos, contra 11 minutos e nenhum exemplo dedicados à tangente), enquanto em Matemática ocorreu exactamente o oposto (11 minutos e nenhum exemplo explorado para aspectos relativos a taxa de variação, contra 85 minutos e 7 exemplos dedicados a conteúdos relativos à tangente) Enquanto os pré-testes não revelaram diferenças significativas entre os dois grupos de alunos relativamente a estes dois aspectos, os resultados dos pós-testes evidenciaram um claro e sem excepções melhor desempenho dos alunos de Engenharia Mecânica nas questões relativas a taxas de variação, por um lado, e um melhor desempenho dos alunos de Matemática nas questões relativas ao conceito de tangente, por outro.

Vários autores realçam a importância de trabalhar o conceito de derivada através das suas múltiplas representações, com o objectivo de abrir perspectivas para a sua compreensão e aplicação em diferentes contextos. É o caso de Orton (1983), que enfatiza o desenvolvimento consistente dos conceitos de taxa de variação, de rectas secantes e de recta tangente a uma curva num ponto, como suportes básicos à introdução do conceito de derivada. O autor defende que estes conceitos devem surgir intimamente ligados a representações gráficas de situações da vida real e que deve ser dada prioridade à investigação prévia e persistente dos seus significados e das suas conexões. Orton sugere ainda que os professores não devem desperdiçar nenhuma oportunidade para desenvolver estes conceitos, chegando mesmo a propor que o conceito de taxa de variação devesse ser estudado como um tema em si e não apenas como um tema de introdução do conceito de derivada.

A interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto leva-nos ao conceito de recta tangente a uma curva num ponto. Este conceito é tradicionalmente ensinado aos alunos, ao longo do seu percurso escolar, de acordo com a sua própria evolução histórica. Assim, os alunos são primeiramente introduzidos à recta tangente a uma circunferência e só num nível escolar posterior a aplicação do conceito sofre uma generalização para todo o tipo curvas como representações gráficas de funções, associado ao conceito de derivada. Vários estudos relatam a grande influência que o conceito apreendido na Geometria exerce nos conceitos imagem dos alunos aquando da sua extensão à Análise, nomeadamente no que se refere à propriedade da tangente encontrar a curva num único ponto, não a atravessando, e ainda ao facto da circunferência se encontrar toda contida no mesmo semi-plano relativamente à recta tangente.

Vinner (1991) realizou um questionário a 278 alunos de Ciências do primeiro ano da universidade do curso de Análise, no qual lhes colocou os três gráficos apresentados na figura 2.3 e lhes solicitou que traçassem, caso existisse, a recta tangente a cada um deles no ponto P.

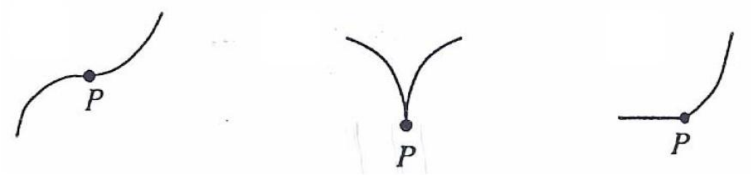


Fig. 2.3 - Gráficos do estudo de Vinner (1991, p. 76)

De notar que apenas cerca de 13% dos alunos traçaram correctamente a recta tangente, tendo-se verificado uma elevada percentagem de alunos que incorrectamente traçaram “rectas tangentes” que evidenciavam a imagem da tangente a uma circunferência (figura 2.4).

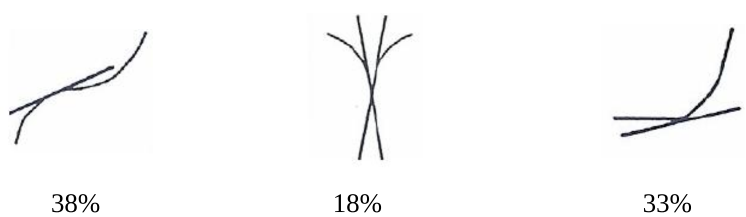
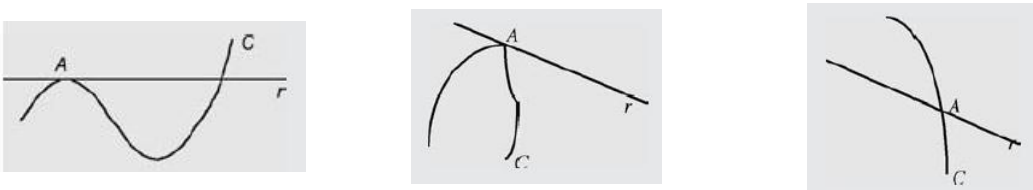


Fig. 2.4 – Alguns dos gráficos apresentados pelos alunos do estudo de Vinner (1991, p. 77) e respectivas percentagens.

Igualmente, Viseu e Almeida (2003) realizaram um estudo que envolveu 19 professores estagiários de Matemática, no qual lhes eram apresentadas algumas curvas e hipóteses de tangentes num determinado ponto, sobre as quais estes deveriam decidir, justificando, se se tratavam realmente, ou não, de rectas tangentes às curvas no ponto dado. Os autores encontraram fortes evidências da influência do conceito de recta tangente a uma circunferência, verificando que a maioria dos professores estagiários deu mais atenção ao número de pontos de intersecção entre a recta e a curva do que à análise do seu comportamento local. Vejamos alguns exemplos de respostas a três das oito questões utilizadas no estudo, conforme apresentadas na figura 2.5.



Questão 1 Questão 2 Questão 3

Fig. 2.5 – Algumas das questões utilizadas no estudo de Viseu e Almeida (2003, pp. 218 e 219).

Verificou-se apenas a existência de duas respostas completamente correctas às questões 1 e 2, não se verificando nenhuma no caso da questão 3. Muitos foram igualmente os inquiridos que apesar de decidirem correctamente sobre se a recta *r* era, ou não, tangente à curva *C* no ponto *A*, apresentaram justificações insuficientes ou incorrectas. Na questão 1 verificaram-se respostas do tipo "*a recta não é tangente à curva C no ponto A, uma vez que intersecta a curva C em mais pontos para além do ponto A*" (6 pessoas) ou "*sim, porque a recta r intersecta a curva C no ponto A, mas não "corta" a curva"* (2 pessoas). Na questão 2 predominou igualmente a referência ao número de pontos comuns à recta e à curva, tendo seis pessoas utilizado esse argumento para justificar o facto de a recta "ser" tangente à curva em *A* e a referência à questão da recta não "cortar" a curva. Nesta questão houve ainda quem afirmasse que "*a recta r é tangente à curva C no ponto A, pois só contém pontos de um dos semi-planos"*. O padrão de identificação com o conceito de recta tangente a uma circunferência continuou a verificar-se nas respostas apresentadas para a questão 3, com respostas afirmativas justificadas por argumentos do tipo "*visto ser este o único ponto que a recta r intersecta C"* ou respostas negativas justificadas com *"pois r "corta" a curva no ponto A"* ou ainda *" porque se prolongarmos a recta r e a curva C vamos encontrar um outro ponto de intersecção"*.

Estes resultados sublinham a dificuldade que os alunos apresentam na determinação geométrica da recta tangente a uma curva num determinado ponto P, como a posição limite das rectas secantes que passam por P e por outro ponto da curva que se aproxima de P (Orton, 1983).

Num estudo conduzido por Orton (1983) que envolveu cento e dez alunos ingleses entre os 16 e os 22 anos, perguntava-se o que acontecia com as rectas PQ quando o ponto Q se aproximava de P (figura 2.6). Orton entendia ser um factor importante a compreensão da tangente como um limite na abordagem da diferenciação. De evidenciar que quarenta e três dos alunos entrevistados não foram capazes de identificar que a secante se tornava uma tangente, apesar de encorajados nesse sentido através de questionamentos complementares. Surgiram respostas como *"a linha torna-se mais pequena"*, *"torna-se um ponto"*, *"desaparece"*, revelando um certo ignorar da noção de secante e um centrar de atenções na corda PQ, ainda que as explicações e a figura tentassem que tal não ocorresse.

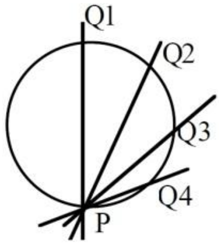


Fig. 2.6 – Figura do estudo de Orton (1983, p. 245)

No mesmo estudo, no qual se pretendia analisar a concepção que os alunos têm de derivada, Orton (1983) verificou, entre outras coisas, que os alunos apresentavam, por um lado, um razoável domínio dos algoritmos em termos do cálculo de derivadas, sobretudo para funções mais simples, e, por outro, uma dificuldade de usar representações gráficas relevantes. Com efeito e ao serem solicitados para determinar a derivada de uma função num ponto, a partir da sua representação gráfica, muitos alunos cometem erros como apresentar o valor da função no ponto ou ainda confundir taxa de variação média e instantânea. Os alunos apresentam uma certa destreza na aplicação de procedimentos e algoritmos de cálculo, mas revelam possuírem conceitos imagem muito pobres, manifestando grandes dificuldades de ligação cognitiva entre as representações visual/gráfica e analítica/algébrica (Dreyfus, 1990).

Vinner (1992, citado em Ventura, 1997) realizou um estudo no qual questionou 119 alunos israelitas que haviam acabado de cumprir o serviço militar, sobre o que entendiam que era uma derivada. As respostas foram agrupadas nas categorias sumarizadas no quadro 2.1.

O que é uma derivada? – Categorias (%)	Respostas do tipo
1. Concepção correcta de derivada como um limite (6%)	"$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$"
2. Concepção correcta de derivada no sentido visual (25%)	"*é o declive da parte ascendente ou descendente de uma função num certo momento*"
3. Concepção instrumental de derivada em que são referidos os métodos para a obter, mas é ignorado o seu significado (23%)	"*é uma função obtida de uma dada função através de regras matemáticas fixas*"; "*é um meio de investigar os domínios de crescimento ou de decrescimento de uma função*"
4. Referência vaga e inaceitável ao conceito de limite (8%)	"*é uma função a tender para mais infinito*"; "*é o lim $\frac{f(s)}{dx}$ quando dx tende para zero*"
5. Referência vaga e inaceitável ao aspecto visual da derivada (26%)	"*é uma função que é uma tangente a outra função*"; "*é a equação da tangente a uma dada função*".
6. Respostas irrelevantes ou não respondidas (12%)	

Quadro 2.1 – Resumo dos resultados obtidos no estudo realizado por Vinner (1992, citado em Ventura, 1997).

Vinner mostrou a sua preocupação pela elevada percentagem de alunos (46%, categorias 4, 5 e 6) que apresentaram formulações vagas, imprecisas e sem significado, lembrando-se de forma avulsa e completamente desprovida de contexto de algumas palavras, símbolos ou imagens relacionadas com o conceito. O autor realçou o facto de as pessoas se recordarem mais dos aspectos visuais do conceito de derivada do que dos seus aspectos analíticos, o que, segundo ele, reflecte a natureza da memória humana, que trabalha melhor com figuras do que com palavras. Neste sentido, Vinner levanta a possibilidade de que forçar a memória a acumular os aspectos analíticos de um conceito em vez dos aspectos visuais, talvez seja contra a sua própria natureza.

Um estudo levado a cabo por Alibert *et al* (1987, citado em Ventura 1997) revelou a diferente forma como os alunos descrevem o conceito de derivada e o modo como o aplicam. Enquanto na sua descrição, os alunos baseiam-se na definição que lhes foi ensinada, através da ideia de limite, a nível da sua aplicação, os algoritmos algébricos tomam hegemonicamente conta dos procedimentos, verificando-se um desaparecimento quase que por completo dos conceitos de aproximação, com a derivada a perder o seu papel funcional.

Os resultados destes estudos denunciam uma predilecção concreta dos alunos pelos procedimentos algorítmicos e uma fraca capacidade de manipulação do conceito de derivada em todas as suas concepções e significados.

Capítulo 3

Metodologia

Neste capítulo pretende-se descrever e apresentar os fundamentos do plano metodológico utilizado neste estudo. De acordo com as intenções e os objectivos estabelecidos, optou-se por uma abordagem qualitativa como metodologia de investigação. Assim, são apresentadas inicialmente algumas características desta metodologia, assim como as suas principais técnicas de recolha de dados. Seguidamente é descrito o contexto educativo no qual decorreu o estudo e são caracterizados os alunos que nele participaram. As duas secções seguintes são respectivamente dedicadas aos procedimentos de recolha e de análise de dados. O capítulo é concluído pela apresentação de algumas limitações do estudo.

3.1. Abordagem qualitativa

A metodologia qualitativa assenta em paradigmas de investigação pautados sobretudo por preocupações com a compreensão de processos, de comportamentos e de perspectivas ou, por outras palavras, com a compreensão da natureza da realidade em análise. O foco da investigação qualitativa é exactamente a compreensão profunda dos problemas no seu ambiente natural, pela investigação, identificação e descrição pormenorizada de tudo que se encontra "por detrás" da realidade observada.

Para Bodgan e Biklen (1994) existem cinco características fundamentais da investigação qualitativa que poderão não estar presentes em igual grau em todos os estudos deste tipo, mas que, no seu conjunto, são representativas da metodologia. A primeira característica diz respeito ao facto de o ambiente natural constituir a fonte directa dos dados e de o investigador constituir o instrumento principal da sua análise. Uma das preocupações principais de um investigador qualitativo é o contexto no qual se desenvolvem as acções observadas. Como tal, estes investigadores entendem que estas acções podem ser melhor compreendidas quando observadas no seu próprio ambiente, frequentando, por isso, os locais de estudo e recolhendo de forma minuciosa todo o material considerado relevante à melhor compreensão dos dados. Segundo os autores, "*para o investigador qualitativo divorciar o acto, a palavra ou gesto do seu contexto é perder de vista o significado*". A análise do material recolhido, independentemente do suporte em que ocorra (áudio, vídeo ou bloco de apontamentos) é sempre complementada pela informação obtida pelo contacto directo, constituindo a chave da sua análise o entendimento que o investigador dele possui.

A segunda característica refere-se ao facto da investigação qualitativa ser descritiva. Com efeito, os dados recolhidos encontram-se sob a forma de palavras ou imagens e não de números e o resultado escrito da investigação incluí elementos que a ilustram e substanciam, como notas de campo, citações, fotografias, vídeos, transcrições de entrevistas ou documentos pessoais, sempre o mais fiéis possível à forma, riqueza e ao contexto em que foram registados. Na investigação qualitativa nada é considerado como trivial ou dado adquirido e nada escapa à avaliação. Os investigadores consideram que tudo pode constituir potencialmente uma pista para uma compreensão mais esclarecedora do objecto em estudo e como tal, a descrição possui aqui um papel fundamental.

A terceira característica tem que ver com o facto de aos investigadores qualitativos interessar mais os processos que os resultados ou produtos. Com efeito, estes investigadores, dedicam-se mais a perceber de que forma as pessoas negoceiam os significados ou ao modo como determinados termos ou noções começam a fazer parte do senso comum. Por exemplo e ao nível da investigação educacional, esta ênfase qualitativa nos processos revelou-se muito útil na análise do modo como as atitudes e expectativas dos professores podem afectar as interacções diárias, actividades, procedimentos e o desempenho cognitivo dos alunos.

A quarta característica é relativa ao facto de se verificar nos investigadores uma tendência para a análise indutiva dos dados. As hipóteses não se encontram construídas previamente, ao invés, vão surgindo à medida que os dados recolhidos vão sendo examinados e agrupados. Verifica-se o que se designa por teoria desenvolvida "de baixo para cima" ou teoria fundamentada, em que peças individuais de informação recolhida, que constituem o ponto de partida, são inter-relacionadas, daí surgindo a identificação das questões importantes. Em vez de procurarem dados para provar hipóteses previamente estabelecidas, os investigadores qualitativos permitem que as abstracções sejam construídas à medida que as partes são recolhidas e examinadas.

A quinta e última característica apresentada pelos autores tem que ver com a importância do significado na abordagem qualitativa. Os investigadores estão interessados em aferir as suas abstracções com as perspectivas dos participantes, reflectindo assim uma importante preocupação com o seu rigor e validade. Interessa perceber o modo como os sujeitos percepcionam as suas experiências, as interpretam e lhes dão significado, tentando clarificar o mais possível a dinâmica interna das situações. Os investigadores qualitativos tentam tornar claros processos subjacentes muitas vezes invisíveis ao observador comum.

Com base no estudo proposto, segundo o qual se pretende identificar, compreender e descrever os processos de aprendizagem de um conceito matemático em ambiente educacional, foi decidido optar por uma investigação de natureza qualitativa. Com efeito, a tarefa de implementar uma experiência de ensino que permita observar os alunos no seu ambiente natural de aprendizagem e identificar as estratégias de construção do seu pensamento conceptual, através de uma análise descritiva e indutiva, vai indubitavelmente de encontro às características intrínsecas da metodologia de investigação qualitativa acima descritas.

Importa agora atender a alguns processos de recolha de dados utilizados na metodologia qualitativa.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), por dados entendem-se os materiais em bruto recolhidos pelos investigadores no ambiente que se encontram a estudar. Esta recolha pode ser feita de forma activa como através de realização entrevistas ou de processos de observação, com a complementar produção de notas de campo, ou ainda de forma passiva como resultado da recolha de material produzido por outrem como memorandos, documentos pessoais ou oficiais, fotografias, artigos de jornal, entre outros. Embora alguns estudos qualitativos privilegiem fortemente um determinado tipo de dados ou método de recolha, a maioria envolve uma variedade importante de dados e de fontes, que com maior ou menor peso contribuem para a concretização do objectivo principal de uma investigação de natureza qualitativa, observar e compreender determinada característica dos sujeitos, observando-a no seu ambiente natural e baseado em dados fortemente descritivos.

Neste estudo a recolha de dados é baseada sobretudo em quatro técnicas, nomeadamente em observação participante, experiência de ensino, realização de entrevistas e ainda em análise de documentos. Seguidamente é apresentada uma breve caracterização destas técnicas.

A *observação participante* resulta da presença activa do investigador no terreno. O investigador participa nas actividades realizadas, estabelecendo relações e integrando-se no seio da comunidade. A proximidade com os sujeitos e com os seus contextos revelam-se essenciais na compreensão e recolha das suas perspectivas. Fundamental para um estudo de observação participante bem sucedido é a redacção de notas de campo. Nelas o investigador deve incluir tudo o que "ouve, vê, experiencia e pensa no decurso da recolha" (Bodgan e Biklen, 1994, pág. 150). As notas de campo devem ser detalhadas, extensivas e precisas. Devem incluir retratos dos sujeitos, descrições do espaço físico, relatos de pormenores ou de acontecimentos e actividades e ainda uma componente reflexiva no que concerne aos comportamentos, níveis de influência/enviesamento dos dados, problemas e preconceitos por parte do observador.

Quando se pretende aplicar uma estratégia de ensino e analisar a eficácia dessa estratégia pode recorrer-se a uma *experiência de ensino*. Esta metodologia permite não só descrever e interpretar os processos envolvidos na aprendizagem mas também influenciar esses mesmos processos através de estratégias pedagógicas planificadas. O seu objectivo é, como o define Kantowski (1978, p.45), "'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos". Como principais características desta metodologia referem-se os períodos de interacção alunos/investigador relativamente longos, o estudo dos processos de uma passagem dinâmica de um estádio de conhecimento para outro e a recolha de dados essencialmente qualitativos (Cobb e Steffe, 1983; Kantowski, 1978). A experiência de ensino contribui geralmente para aprendizagens ricas por partes dos alunos, não só por envolver actividades cuidadosamente construídas, como também pela ênfase e cuidado que coloca na interacção com o ensino e com o contexto em que este ocorre, duas variáveis grandemente influenciadoras de construção de conhecimentos.

A *entrevista* é, de acordo com Bodgan e Biklen (1994), um dos principais processos metodológicos utilizados nos estudos qualitativos. Ela pode variar quanto ao grau de estruturação, podendo ser muito aberta ou informal, semi-estruturada pela utilização de um guião ou ainda ser completamente estruturada, situação em que o sujeito fica muitas vezes limitado a uma categorização de respostas pré-definidas. Este último tipo de entrevista ultrapassa, segundo os autores, o âmbito qualitativo.

A decisão por um determinado tipo de entrevista prende-se com os objectivos do estudo e mesmo com as diferentes fases em que ele se encontra, podendo coexistir, de forma perfeitamente pacífica, diferentes tipos de entrevistas num mesmo estudo. As entrevistas não estruturadas permitem explorar os conteúdos mais significativos do ponto de vista do sujeito, com este a desempenhar um papel crucial quer na condução da entrevista como na definição do estudo. Adicionalmente, produzem dados mais dispersos e consequentemente mais difíceis de classificar e analisar. Por sua vez, nas entrevistas semi-estruturadas, ao mesmo tempo que se verifica uma garantia de recolha de dados comparáveis entre os sujeitos, salvaguarda-se igualmente um certo grau de flexibilidade que permita aos entrevistados explorarem as suas próprias visões e conteúdos, funcionando o guião como uma lista de pontos de referência a utilizar durante a entrevista.

Para Bodgan e Biklen (1994) as boas entrevistas caracterizam-se por produzirem dados ricos, que traduzam as perspectivas dos sujeitos. Como tal, o entrevistador deve permitir que os entrevistados se sintam com um à vontade suficiente para exporem livremente os seus pontos de vista, sendo flexível, paciente e incentivando-os sempre a exemplificar e clarificar as suas ideias e raciocínios.

Neste estudo, pelas suas características e objectivos, foram realizadas entrevistas semi-estruturas.

Relativamente à componente de *análise de documentos* ela compreende a recolha e estudo posterior de documentos produzidos pelos sujeitos ou não, mas relacionados com o tema em estudo, como relatórios, memorandos ou documentos de avaliação. A informação recolhida pode não só resultar num importante elemento informativo relativo à investigação realizada, como potenciar o surgimento de novas questões a explorar no presente ou em estudos futuros.

3.2. Participantes e cenário

O presente estudo foi realizado com alunos de uma turma do 11º ano de escolaridade de uma escola secundária no concelho de Cascais, região da Grande Lisboa, no ano lectivo de 2008/2009. A escola, de média dimensão, possuía um ambiente muito tranquilo e acolhedor, verificando-se um bom relacionamento entre professores, alunos e funcionários e uma preocupação omnipresente com o sucesso académico dos alunos. Era constituída por uma dezena de pequenos edifícios, com apenas um piso acima do nível do chão, e por um pátio central, para o qual estes ficavam voltados.

A turma era composta por 15 elementos, seis rapazes e nove raparigas que, no geral, mantinha a mesma constituição desde o 10º ano de escolaridade. A idade dos alunos variava entre 15 e 19 anos, sendo a média de idades de 16. No que concerne ao aproveitamento no geral das disciplinas, este poderia ser considerado de médio fraco. Relativamente à Matemática verificaram-se as médias de 11 e de 12 valores respectivamente no 2º e no 3º períodos.

Do ponto de vista do comportamento, os alunos eram cordiais e afáveis, verificando-se uma boa muito boa relação professor-alunos, enquanto no que se refere ao aproveitamento, revelavam algumas fragilidades. Os alunos, na sua generalidade, compreendiam os conteúdos no momento em que estes eram trabalhados, mas denotavam uma certa falta de trabalho extra-aula essencial à sua consolidação. Demonstravam frequentemente alguma ausência de iniciativa e de destreza na realização das tarefas propostas, verificavam-se momentos de uma certa apatia colectiva. De destacar, no entanto, a existência de cerca de três alunos com um aproveitamento bom ou muito bom e de dois alunos que, apesar não o reflectirem no aproveitamento, possuíam um bom nível de raciocínio matemático.

As três aulas de matemática semanais ocorriam em três dias consecutivos (Quarta, Quinta e Sexta feiras) e encontravam-se distribuídas por salas e edifícios diferentes, sendo que uma delas decorria no laboratório de matemática, no qual existiam alguns computadores. A professora dinamizava frequentemente aulas com recurso a esta ferramenta, utilizando programas de geometria dinâmica na exploração e desenvolvimento de conceitos. Estas aulas poderiam ocorrer em qualquer das salas de leccionação, fazendo uso, se necessário, de computadores portáteis disponíveis na escola para o efeito. A dinamização de tarefas diversificadas e desafiantes com recurso a tecnologias de informação era bem recebida na turma, provocando um maior interesse e elevando a dinâmica da sala de aula.

Os conteúdos relativos a derivadas, que constituíram o objecto deste estudo, foram leccionados no 3º período. Para além destes conteúdos os alunos haviam já explorado ao longo do ano lectivo e por esta ordem, trigonometria, geometria analítica e estudo de funções, nomeadamente de funções racionais e de operações com funções. A concluir o ano lectivo e logo após a leccionação do conceito de derivada, os alunos ainda efectuaram um estudo sobre sucessões.

Para melhor compreender os processos presentes na compreensão dos conceitos pretendidos, foi implementada uma estratégia de investigação que envolveu uma experiência de ensino e a selecção de uma amostra de três alunos para a realização de estudos mais pormenorizados. A escolha da amostra baseou-se na categorização efectuada por Domingos (2003) relativa aos níveis de complexidade dos conceitos imagem manifestados pelos alunos. Trabalhando sobre os conceitos matemáticos avançados no início do ensino superior, o autor identificou três níveis de complexidade: *conceito imagem incipiente*, *conceito imagem instrumental* e *conceito imagem relacional*. Apesar do referido estudo ter sido efectuado num nível de ensino no qual o pensamento matemático avançado e as inerentes exigências de abstracções de definições e deduções, apresentam um grau de complexidade nada comparável ao do nível presente neste estudo, foi aqui utilizada a mesma classificação, com a ressalva de algumas adaptações das suas principais características. Assim, foram considerados os níveis de complexidade dos conceitos imagem manifestados pelos alunos conforme se encontram abaixo descritos.

No *conceito imagem incipiente* encontram-se os alunos que apresentam conceitos imagem muito incompletos, referentes a objectos elementares que por si só não traduzem o conceito pretendido. Estes alunos referem normalmente apenas algumas características mais notórias do objecto matemático, apresentando uma elevada dificuldade em estabelecer relações entre elas. Neste nível, os processos utilizados são quase sempre elementares e resultantes de uma mera automatização de procedimentos, sendo a coordenação entre eles quase sempre fraca. A tradução entre representações é realizada com base em procedimentos elementares muitas vezes não coordenados de forma adequada, realizada de forma parcial e não possibilitando a pretendida compreensão do conceito. A verbalização de propriedades ocorre sobretudo assente na memorização e no ventriloquismo, embora algumas propriedades elementares possam ser usadas com compreensão. De assinalar ainda a utilização parcial de proceitos[18], destacando apenas a sua componente processual e o facto de, na maioria dos casos, as componentes conceptual e processual andarem desligadas uma da outra.

Os alunos que apresentam um *conceito imagem instrumental* são alunos que conseguem utilizar alguns objectos matemáticos mais complexos que estão na base dos conceitos abordados, conseguindo ainda estabelecer processos que possam conduzir à construção de novos conceitos. No entanto, a maioria dos objectos referidos é elementar e, muitas vezes, os processos realizados sobre eles denotam uma falta de coordenação,

[18] O termo proceito é um neologismo que pretende designar um processo e um conceito representados pelo mesmo símbolo.

não lhes permitindo ser capsulados[19] em novos objectos. Neste nível, processos realizados pelos alunos recorrem maioritariamente a objectos concretos e a procedimentos algébricos, não se verificando a capacidade de utilizar o conceito ensinado como um objecto. Os processos envolvendo objectos abstractos são abordados de forma parcial. A tradução entre representações é efectuada de modo operacional, baseada em procedimentos interiorizados, mas cujas traduções simbólicas se revelam quase sempre incompletas. A verbalização de propriedades elementares é efectuada com compreensão e com o estatuto de objectos matemáticos, enquanto no caso das propriedades directamente relacionadas com o conceito em estudo, verifica-se apenas uma referência aos processos pelos quais estas podem ser traduzidas. De igual forma, os objectos elementares são usados como proceitos, enquanto no caso dos conceitos mais complexos é dado apenas ênfase à componente processual.

Por último e no caso do *conceito imagem relacional*, os alunos entendem os conceitos como objectos matemáticos que possuem uma existência própria para além dos processos presentes na sua construção. Neste nível, os alunos conseguem lidar com um maior número de processos, mostrando-se não só capazes de recorrer aos processos que estiveram na origem da construção desses objectos, como também de coordenar processos realizados sobre objectos mais elementares, de forma a os capsular e a formar novos objectos. Na tradução entre representações observa-se a existência de uma maior destreza em traduções simbólicas dos conceitos, verificando-se simultaneamente uma diminuição dos procedimentos operacionais. As propriedades são enunciadas com compreensão e representam objectos matemáticos. Relativamente ao pensamento proceptual, os conceitos matemáticos mais avançados começam a ser entendidos como proceitos, sendo possível verificar a coexistência e a inter-relação das componentes processual e conceptual.

Tomando esta classificação em consideração e após troca de ideias entre a investigadora e a professora, resultante das observações efectuadas pela primeira e do conhecimento sólido da turma detido pela segunda, foi seleccionado um conjunto de três alunos tendo, que cada um deles, sido conectado com cada um dos três níveis descritos. Com esta amostra que se julgou representativa da turma, pretendia-se investigar e compreender de forma mais pormenorizada a apreensão dos conceitos explorados. Paralelamente, pela comparação das características individualmente

[19] O termo capsulação refere-se à construção de um objecto matemático estático a partir da interiorização de processos dinâmicos.

observadas com as descritas em cada um dos níveis definidos, procedeu-se ainda à aferição da validade da escolha efectuada para cada um dos níveis.

Assim e relativamente aos níveis de conceitos imagem, foram respectivamente seleccionados, pela ordem de complexidade que pareciam manifestar, os alunos Cristiana, Rita e João, considerados como potenciais bons informantes. Os três alunos acederam prontamente em colaborar com a investigadora. Seguidamente é apresentada uma breve descrição das características de cada um.

A Cristiana era talvez a aluna que apresentava maiores dificuldades de aprendizagem de entre o grupo seleccionado. Era uma aluna de nível médio a todas as disciplinas tendo tido nos 2º e 3º períodos igual classificação de 11 valores na disciplina de matemática. Era uma pessoa muito calma e simpática, mas também algo tímida. Dificilmente participava activamente nas aulas se para tal não fosse solicitada. Apesar disso era uma aluna esforçada em melhorar a sua aprendizagem, embora, parecesse não ter consciência da sua necessidade em apresentar um maior ritmo de execução de tarefas. Quando atenta à construção dos conceitos e quando estes eram realizados em situação de proximidade, nas quais eram facultadas pequenas ajudas, a Cristiana conseguia atingir razoáveis níveis de compreensão, que, no entanto e alguns dias depois, pareciam diluir-se e dar lugar a inseguranças e incertezas. Esforçava-se por trabalhar em casa, mas poucas vezes conseguia concluir com sucesso as tarefas de forma autónoma.

A Rita era uma pessoa alegre e sociável. Aluna média a todas as disciplinas, obteve nos 2º e 3º períodos igualmente a classificação de 11 valores na disciplina de matemática. Na sala de aula era uma aluna discreta, mas apresentava bons níveis de compreensão dos conteúdos trabalhados e uma certa dinâmica, própria de quem possui um certo à-vontade com o que faz. Após a compreensão de um conceito, apresentava alguma segurança na sua utilização e aplicação. Era uma aluna aplicada e organizada, conseguindo algumas vezes efectuar de forma correcta os exercícios que eram solicitados tanto na sala de aula como em casa.

O João era um aluno bastante perspicaz, que apresentava muita facilidade em lidar com novas situações na sala de aula, mas que muito pouco se dedicava ao estudo em casa, sendo prejudicado por isso no seu aproveitamento. Na disciplina de matemática obteve, nos 2º e 3º períodos a respectiva classificação de 11 e de 12 valores, sendo um aluno médio nas outras disciplinas. Gostava muito de computadores e empenhava-se com ânimo em actividades que sentia desafiadoras. Bem-disposto, apresentava uma forma muito natural e intuitiva de resolver as situações que lhe eram colocadas.

Raramente realizava as tarefas que lhe eram solicitadas para casa. O João denotava capacidades para ser um aluno brilhante, sendo, no entanto, fortemente prejudicado no seu aproveitamento pela sua falta de trabalho e de empenho.

3.3. Procedimentos de recolha de dados

A recolha de dados neste estudo assentou em procedimentos de natureza qualitativa, nomeadamente observação participante, experiência de ensino, realização de entrevistas e análise de documentos, conforme a seguir descritos.

Observação participante

Integrado no estágio pedagógico da investigadora, este estudo beneficiou da presença desta nas aulas de matemática na turma desde o início do ano lectivo. Esta presença não só permitiu a sua integração no contexto de sala de aula, minimizando deste modo a sua influência no possível enviesamento dos dados, como possibilitou uma observação pormenorizada dos elementos da turma, essencial à compreensão das suas perspectivas. Pela participação activa da investigadora em todo o tipo de aulas ao longo do ano lectivo, expositivas, práticas ou ainda dedicadas a explorações com recurso ou não a tecnologias, os alunos integraram a sua presença na sala de uma forma natural e sólida, solicitando de forma indiferenciada quer a sua, quer a ajuda da professora. Aquando dos momentos dedicados à recolha de dados para o presente estudo, a investigadora teve especial atenção com a redacção de notas de campo, essenciais para uma análise mais rigorosa da compreensão efectuada pelos alunos do conceito de derivada leccionado. As notas de campo que incluíram descrições do espaço físico/temporal, observações de comportamentos, pormenores de acontecimentos e ainda reflexões da investigadora foram integradas e analisadas em complemento com os restantes dados recolhidos.

Experiência de ensino

A investigadora implementou e conduziu um processo de ensino de derivadas abordando, em concreto, taxa de variação como um limite de taxa média de variação, derivada de uma função num ponto e função derivada de uma função, conforme o modelo da intervenção e as aulas leccionadas, ambos descritos no capítulo 4. A intervenção didáctica foi efectuada em quatro aulas, a primeira com duração de 135 (90+45) minutos e as restantes com duração de 90 minutos, leccionadas no horário e nas salas de aula habituais. Por motivos que tiveram que ver com o processo de avaliação de docentes e com disponibilidade de datas, houve necessidade de a professora leccionar uma aula sobre cujo tema não incidia a investigação, entre a penúltima e a última das aulas dedicadas ao estudo. Assim, as aulas tiveram lugar nos dias Quarta, 22; Quinta, 23; Sexta, 24; e Quinta, 30; no mês de Abril do ano de 2009. Nas aulas participaram todos os alunos da turma. Os conteúdos foram abordados tendo em vista uma desejável construção autónoma e natural dos conceitos envolvidos. As aulas foram muito participadas pelos alunos, tendo-se, no entanto, verificado a existência de algumas dificuldades na assimilação e inter-relação dos objectos e representações envolvidas, à medida que o seu nível de complexidade aumentava.

Todas as aulas foram audiogravadas de modo a permitir, em conjunção com as notas de campo recolhidas, uma reprodução mais fiel e pormenorizada tanto do desenrolar das próprias aulas, como do desempenho e do desenvolvimento cognitivo manifestado pelos alunos. A audição das gravações efectuada no próprio dia a que diziam respeito, constituiu igualmente uma importante ferramenta de trabalho, ao possibilitar a averiguação da existência de aspectos menos compreendidos pelos alunos e a consequente realização, na aula seguinte, de esforços para a sua clarificação.

Entrevistas

As entrevistas constituíram a principal técnica de recolha de dados efectuada neste estudo. Foram realizadas duas entrevistas com o objectivo de aferir e caracterizar as aprendizagens conseguidas pelos alunos, tendo estas sido aplicadas a cada um dos três elementos seleccionados. As entrevistas foram realizadas em momentos diferentes e possuíram características e objectivos distintos. Os respectivos guiões são apresentados nos anexos 1 e 2.

A primeira entrevista ocorreu no final do dia 22 de Abril, dia em que foi leccionada a primeira aula relativa ao tema. Tratou-se uma entrevista de carácter mais estruturado, podendo mesmo ser entendida como um questionário. Pretendia-se averiguar se os objectos matemáticos presentes na construção do conceito de derivada haviam sido assimilados pelos alunos, logo após o seu primeiro contacto com estes. Tentava-se, deste modo, minimizar outros possíveis efeitos condicionadores da aprendizagem, como por exemplo a posterior falta de estudo individual ou o efeito da relação tempo/esquecimento. Foi aplicada simultaneamente aos três alunos numa pequena sala de trabalho, junto às salas de aula, em cuja parte central existiam algumas mesas agrupadas em ilha. Os alunos ficaram sentados nessas mesas centrais da sala. O questionário era composto por cinco folhas agrafadas, nas quais eram colocadas cinco situações. Cada situação encontrava-se disposta individualmente por página, de modo não só a permitir uma maior concentração na sua abordagem, como também a proporcionar a existência de espaço em branco, em forma de convite para exposição de todos os elementos necessários à explanação dos raciocínios envolvidos. As situações foram colocadas segundo a ordem com que tinham sido abordadas na aula. As duas primeiras questões apelavam para a compreensão do significado físico e geométrico de taxa média de variação, na terceira questão os alunos eram convidados a representar a recta tangente num ponto pertencente a cada um de três gráficos que representavam três funções distintas, enquanto as duas últimas questões apelavam para a interpretação geométrica do conceito de derivada num ponto como o declive da recta tangente ao gráfico nesse ponto. As terceira e última questões (ver anexo 1) foram respectivamente adaptadas dos estudos conduzidos por Vinner (1991) e Bingolbaldi e Monaghan (2008). A entrevista teve a duração de cerca de 45 minutos.

Apesar de se tratar uma entrevista com carácter mais estrutural, baseada num questionário, a investigadora permitiu alguma expressão de ideias e opiniões por parte dos alunos, anotando os protagonistas e conteúdos das intervenções efectuadas. Por esta via, a investigadora tentou reunir alguns elementos importantes para a análise da compreensão dos alunos relativa aos objectos matemáticos estudados.

A segunda entrevista possuiu um carácter semi-estruturado e foi realizada individualmente a cada um dos três alunos constituintes da amostra, nos dias 12 e 13 de Maio de 2009. As entrevistas decorreram duas semanas após a leccionação dos conteúdos envolvidos no estudo e após a realização de um teste de avaliação sumativa, mais concretamente o teste intermédio realizado a nível nacional pelo Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE) do Ministério da Educação (efectuado a 7 de Maio de 2009). Estas entrevistas tiveram como objectivo a compreensão dos conceitos imagem relativos ao tema das derivadas, desenvolvidos e detidos pelos alunos após a conclusão do seu estudo e após a análise porventura mais atenta por eles realizada, considerando a sua preparação para o referido teste de avaliação. As entrevistas tiveram lugar na mesma sala em haviam decorrido as primeiras, tendo-se verificado uma duração de 26, 48 e 70 minutos, respectivamente para o João, a Rita e a Cristiana.

Estas entrevistas eram constituídas por algumas situações colocadas oralmente aos alunos. Nas questões que envolviam representações gráficas, elas foram-lhes disponibilizadas, enquanto nas restantes lhes foi fornecida uma folha de papel na qual estes eram encorajados a expor todos os elementos justificadores da resposta dada, presentes no seu raciocínio. Cada folha foi sendo fornecida aos alunos, à medida que a entrevista ia decorrendo e que cada situação lhes iam sendo colocada. À semelhança da primeira entrevista, as situações foram apresentadas segundo a ordem com que tinham sido abordadas nas aulas. Algumas delas possuíram um teor muito semelhante a algumas situações colocadas nessa primeira entrevista, pretendendo-se desta forma averiguar as diferenças observadas entre esses dois momentos de recolha de dados. Com esta entrevista, pretendeu-se abordar todos os objectos matemáticos trabalhados nas aulas, subjacentes ao conceito de derivada. As questões colocadas nesta entrevista podem ser encontradas no anexo 2. A primeira questão envolvia três afirmações sobre as quais os alunos deveriam pronunciar-se sobre a sua validade, justificando. As afirmações, colocadas em separado, envolviam, respectivamente, a relação entre a taxa média de variação (t.m.v.) e a taxa de variação instantânea, entre a t.m.v. e a monotonia da função e a representação de rectas tangentes a curvas num ponto. A segunda situação apelava para a interpretação geométrica do conceito de derivada num ponto como o declive da recta tangente ao gráfico nesse ponto e à execução de alguns procedimentos algébricos, enquanto a terceira apelava à inter-relação de vários objectos matemáticos subjacentes ao conceito de derivada, como a função derivada, a derivada num ponto, as regras de derivação e ainda o significado físico de derivada. Na quarta e última situação era solicitado aos alunos que representassem os gráficos das funções derivadas de três funções afim. As situações apresentadas foram baseadas em questões presentes no manual escolar adoptado.

As entrevistas decorreram num ambiente agradável e contaram com a pronta disponibilidade e colaboração dos alunos envolvidos. Apesar da relação cordial e familiar existente com a investigadora, alguns alunos sentiram-se, por vezes, inibidos em fornecer determinados elementos do seu raciocínio, por possuírem a noção de que estes não se encontravam correctamente construídos, uma vez que se haviam "esquecido" de alguns conceitos e procedimentos. Não obstante, os alunos mantiveram, na generalidade, uma postura descontraída e uma vontade sincera de colaborar com a investigadora na realização do seu trabalho. Ao longo deste segundo grupo de entrevistas, a investigadora efectuou intervenções pontuais, no sentido de ajudar os alunos a clarificação alguns conceitos menos apreendidos, sempre que estes haviam sido devidamente explorados e com o objectivo de as entrevistas resultarem numa mais-valia para a aquisição de conhecimentos dos alunos envolvidos, ao invés de constituírem um elemento gerador de maiores incertezas e confusões. Adicionalmente e sempre que considerou importante, a investigadora colocou algumas questões aos alunos, no sentido de incentivar a sua participação e explicitação dos raciocínios efectuados.

Todas as entrevistas foram audiogravadas. O material assim recolhido, tal como as notas de campo efectuadas neste contexto, revelaram-se fundamentais para a identificação e compreensão da forma como os conteúdos foram apreendidos pelos alunos.

Análise de documentos

Os documentos analisados no âmbito deste estudo dizem essencialmente respeito ao teste de avaliação sumativa realizado no final do mês de Maio de 2009 e a documentos da escola contendo informação pessoal e académica dos alunos.

3.4. Procedimentos de análise de dados

A análise de dados foi levada a cabo de acordo com os objectivos do trabalho, tendo por base os dados recolhidos conforme descrição apresentada na secção anterior: observação participante, experiência de ensino, realização de entrevistas e análise de documentos.

Os objectivos deste estudo consistiam não só na análise da eficácia das estratégias de ensino implementadas na leccionação do conceito derivada, como na aferição da validade da identificação inicial efectuada entre os alunos nele participantes e os diferentes níveis de complexidade de conceitos imagens. Deste modo foram efectuados essencialmente dois tipos de análise dos dados, um respeitante às aprendizagens dos tópicos em estudo, realizada transversalmente aos alunos e às várias fontes de dados e outro relativo à verificação dos níveis de complexidade dos conceitos imagem, organizado longitudinalmente em função das prestações individuais de cada aluno. Em ambos os tipos de análise foi privilegiada uma importante componente reflexiva, uma vez que a este estudo não interessava tanto uma simples verificação da apreensão dos conceitos ou dos níveis de conceitos imagem manifestados pelos alunos, mas uma análise cuidada dos condicionantes e factores que neles intervêm.

3.5. Limitações do estudo

A metodologia qualitativa escolhida para este estudo, baseada numa análise descritiva e indutiva dos dados e que se interessa sobretudo pelo significado e pelos processos, em detrimento dos resultados ou produtos, acarreta algumas limitações à investigação. Com efeito, o facto de a investigadora possuir um papel activo e participante, interferindo directamente com o objecto de estudo, faz com que se torne inevitável a existência de alguma interferência da sua visão e perspectivas pessoais no trabalho realizado, sobretudo no que concerne à recolha e análise de dados. Outra limitação inerente a este tipo de metodologia tem que ver com dificuldades de generalização de resultados. Com efeito e dado o estudo incidir com maior detalhe sobre as aprendizagens de apenas três alunos, embora evidenciando níveis de complexidade de conceitos imagem distintos, não é possível fazer qualquer tipo de generalização rigorosa a partir de tão reduzido número de participantes. Em contrapartida, e atendendo ao contexto de formação inicial de docentes de matemática em que o estudo se desenrolou, esta metodologia permitiu uma desejável análise pormenorizada e reflectida da forma como os processos de ensino podem influenciar a compreensão e a aprendizagem dos alunos.

Uma outra limitação do estudo tem que ver o duplo papel de professor e investigador assumido pela sua autora. Com efeito, o facto de ter leccionado as aulas integrantes deste estudo, dificultou o acompanhamento pormenorização de todas as dinâmicas de aprendizagem ocorridas na sala de aula. Por outro lado, também o facto da investigadora se encontrar num processo de formação profissional, integrada num estágio pedagógico, em relação ao qual possuía diversos deveres e responsabilidades, resultou noutra limitação deste estudo. Em verdade, a inevitável dispersão da atenção, do tempo e do cuidado da investigadora por estes dois compromissos, o estágio e a investigação, acarretou algumas consequências para o estudo, nomeadamente no que se refere à tomada de notas de campo.

Capítulo 4

Intervenção didáctica

Este capítulo é dedicado à descrição da intervenção didáctica efectuada no âmbito deste estudo. Assim, é apresentado o modelo segundo o qual a investigadora orientou a sua intervenção, seguido pela descrição das respectivas aulas leccionadas.

4.1. Modelo da intervenção didáctica

A investigadora procurou a preparação de um conjunto de aulas que proporcionassem processos de ensino ricos e globalizantes e desejavelmente geradores de aprendizagens sólidas dos conceitos e objectos matemáticos em estudo. A investigadora baseou-se sobretudo nas indicações metodológicas do Programa de Matemática A do 11º ano homologado pelo Ministério da Educação, assim como nas orientações curriculares presentes no novo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB) a entrar em vigor no ano lectivo seguinte (2010-2011) conforme seguidamente referidas.

A Matemática é uma linguagem comum e essencial a todos os ramos da ciência, possuindo igualmente uma presença constante e omnipresente no nosso dia-a-dia. Neste sentido, o PMEB recomenda que "as situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e incluir outras áreas do saber e situações do quotidiano dos alunos" (pág. 9). Por seu lado e em relação ao tema em estudo, o Programa de Matemática A do 11º ano reconhece a importância do conceito de taxa de variação para outras áreas do saber, nomeadamente para a área curricular de Físico-Química e recomenda a utilização de exemplos concretos dessa área. Neste programa é adicionalmente sublinhado o tratamento privilegiado que deve ser atribuído às funções que relacionam variáveis com significado concreto. O PMEB salienta ainda que estas situações devem ser apresentadas de modo realista e sem artificialidade, de forma a permitir a capitalização dos conhecimentos prévios dos alunos.

O PMEB enfatiza igualmente a importância de orientações metodológicas como a exploração de conexões, a utilização de diferentes representações e o recurso a materiais manipuláveis, nomeadamente a ferramentas computacionais. Com efeito e no sentido de promoção da compreensão matemática pelos alunos, torna-se essencial desenvolver a identificação de ideias e conceitos matemáticos e a realização de conexões entre elas. A promoção da capacidade de lidar com diversas representações de um conceito, de as utilizar em diferentes situações e de saber seleccionar a mais adequada a uma determinada situação, promove igualmente uma desejável compreensão matemática. Neste sentido, as ferramentas computacionais, nomeadamente através de programas de Geometria Dinâmica, podem constituir um importante auxiliar, uma vez que favorecem o desenvolvimento da intuição geométrica e da capacidade de visualização e consequentemente a compreensão dos conceitos e relações geométricas.

Outra componente metodológica referenciada no PMEB é a abordagem de aspectos da História da Matemática, nomeadamente a sua própria evolução em termos de notações, representações e conceitos, no sentido de proporcionar uma perspectiva dinâmica desta área de conhecimento. Para além das indicações metodológicas já referidas, neste documento é igualmente atribuída especial importância ao trabalho a efectuar em contextos puramente matemáticos, nomeadamente pela análise e construção de raciocínios e estratégias matemáticas e pelo conhecimento e utilização de conceitos, procedimentos, notações e linguagem apropriada.

No que concerne ao tema em estudo, o Programa de Matemática A do 11º ano apresenta algumas indicações metodológicas específicas, como a introdução das noções de taxa média de variação e de derivada pelo recurso ao uso informal da noção de limite e à respectiva interpretação geométrica.

Tentando abranger todas as indicações metodológicas referidas, a investigadora procurou estabelecer uma estratégia de ensino que, através de uma gestão adequada e eficaz de cada uma delas, promovesse uma aquisição sólida e autónoma de conhecimentos por parte dos alunos. A operacionalização destas indicações metodológicas será especificada na secção seguinte, na qual são descritas as aulas leccionadas.

4.2. As aulas leccionadas

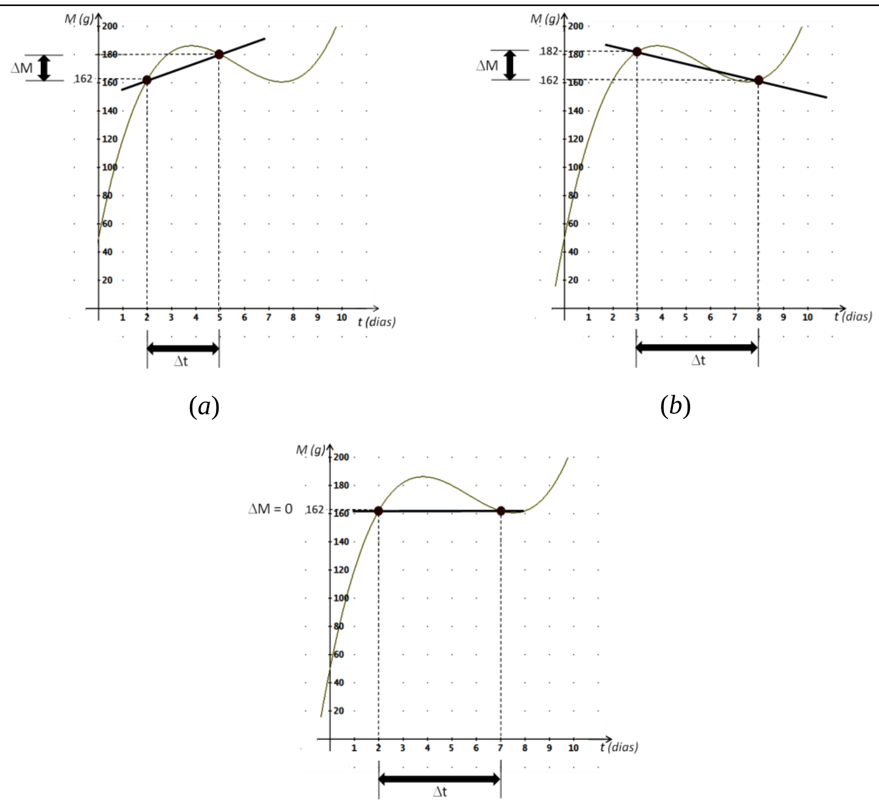
No âmbito da experiência de ensino levada a cabo neste estudo, foram leccionadas quatro aulas. Seguidamente é apresentada uma descrição de cada uma delas, tendo sobretudo em atenção os conteúdos abordados, as actividades desenvolvidas e as estratégias metodológicas implementadas.

Aula 1

Esta aula decorreu em dois tempos lectivos distintos com respectivamente 90 minutos e 45 minutos de duração, separados por um intervalo de 10 minutos. No primeiro tempo lectivo foram abordados os conceitos de taxa média de variação e de derivada de uma função num ponto e no segundo foi realizada uma actividade computacional com recurso ao programa de Geometria Dinâmica *The Geometer's Sketchpad*. O objectivo desta actividade consistia na exploração geométrica do conceito de derivada e consequentemente na sua consolidação.

Os conteúdos abordados nesta aula assumiram um papel central na condução da experiência de ensino, uma vez que estabeleceram as bases do conceito de derivada em estudo. O quadro 4.1 apresenta um resumo destes conteúdos, assim como das correspondentes actividades e estratégias implementadas.

Conteúdos	Actividades / Estratégias
– Variação e taxa média de variação (t.m.v.). Significado físico e unidades.	– Distribuição pelos alunos de uma ficha de trabalho (ver anexo 3, Ficha de Trabalho Nº 32 A) e desenvolvimento dos conceitos a partir da resolução conjunta de um exercício envolvendo um contexto real (exercício 1.1). – Apresentação da definição de taxa média de variação.
– Interpretação geométrica de t.m.v.	– Solicitação aos alunos da identificação do significado geométrico da t.m.v. no intervalo considerado, através da representação, no quadro, do gráfico da função.
– Aplicação e consolidação dos conceitos.	– Solicitação aos alunos da resolução sequencial das alíneas 1.2 e 1.3, acompanhadas pela discussão do seu significado físico e do seu significado geométrico.
– Exploração da relação entre monotonia da função num determinado intervalo e respectiva t.m.v.	– Realização da análise pretendida no quadro, a partir da representação gráfica da função, para cada um dos intervalos considerados anteriormente, conforme os esquemas apresentados na figura 4.1.

	 (a) (b) (c) Fig. 4.1 – Esquemas para discussão da relação entre t.m.v. e monotonia da função: (a) - t.m.v. positiva e função não monótona; (b) - t.m.v. negativa e função não monótona; (c) - t.m.v. nula e função não constante
– Introdução ao conceito de derivada ou taxa de variação.	– Discussão acerca da falta de informação transmitida pela t.m.v. relativamente ao comportamento local da função e sensibilização para a necessidade de consideração de intervalos de amplitude mais pequena. – Solicitação aos alunos da resolução do exercício 2 da Ficha de Trabalho Nº 32 A, envolvendo um cenário do quotidiano dos alunos e após estabelecer o paralelo entre t.m.v. e velocidade média. – Discussão conjunta na turma acerca do método a usar na determinação da velocidade instantânea (exercício 2.3), uma vez que $\frac{\Delta d}{\Delta t}=\frac{0}{0}$ (sem significado). Resolução do exercício com ajuda das tabelas fornecidas e discussão acerca do valor a considerar. – Solicitação aos alunos da resolução do exercício 3 da Ficha de Trabalho Nº 32 A, após estabelecer o paralelo entre velocidade e taxa de variação. – Identificação da determinação de t.m.v. em $[a, x]$ com a razão incremental $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ e da determinação de taxa de variação ou derivada no ponto a com o limite da razão incremental quando x se aproxima de a. – Apresentação da definição de derivada.

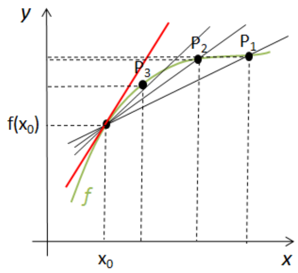
<table>
<tr>
<td>– Interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto.</td>
<td>– Construção com os alunos, através da representação gráfica no quadro de uma função genérica (figura 4.2), da recta tangente ao gráfico no ponto de determinação da derivada, como a posição limite de rectas secantes.


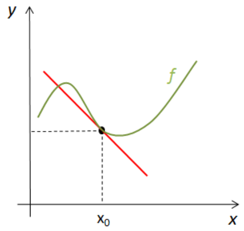
Fig. 4.2 – Processo de construção da recta tangente a uma curva num ponto.</td>
</tr>
<tr>
<td>– Esclarecimentos acerca da determinação da recta tangente a uma curva num ponto</td>
<td>– Discussão acerca do processo de determinação da tangente como a posição limite de rectas secantes.
– Esclarecimento acerca de possíveis identificações com propriedades verificadas pela tangente a uma circunferência num ponto e nem sempre verificadas no caso de outras curvas. Apresentação do exemplo apresentado na figura 4.2, para esclarecer a possibilidade da recta tangente intersectar outro(s) ponto(s) pertencente(s) à função (figura 4.3).


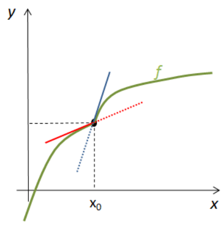
Fig. 4.3 – Intersecção da recta tangente a uma curva num ponto com outro ponto pertence à curva.
– Discussão acerca da determinação da tangente à curva de uma função num ponto pela posição limite das secantes “à esquerda” e “à direita” desse ponto e pela coincidência de ambas (figura 4.4).


Fig. 4.4 – Determinação das semi-tangentes a uma curva num ponto.
– Apresentação de referências históricas acerca da evolução do conceito de tangente ao longo dos tempos.</td>
</tr>
</table>

Quadro 4.1 - Resumo dos conteúdos, actividades e estratégias da aula 1.

Este primeiro tempo lectivo foi muito participado pelos alunos, que se entregaram de forma entusiasmada não só às actividades e exercícios propostos, como igualmente às discussões incentivadas pela investigadora. No seu geral, os alunos acompanharam bem o decorrer da aula, parecendo apreender correctamente os conceitos abordados. Quer a utilização de situações do quotidiano dos alunos (exercício 1 com vista aérea da escola), quer de situações relacionadas com a disciplina de Física ou Química revelou-se muito importante tanto para o despertar de entusiasmo pela execução das actividades, como para a melhor compreensão e assimilação dos conteúdos envolvidos. Aquando, por exemplo, da discussão acerca da falta de informação transmitida pela t.m.v. relativamente ao comportamento local da função e em resposta à questão levantada pela investigadora relativamente à pertinência de uma medida legislativa que previa a autuação dos condutores que circulassem em auto-estradas, com base no tempo gasto a percorrer a distância entre duas portagens, os alunos manifestaram de forma muito clara e entusiasmada a sua opinião, fazendo cálculos e traçando vários cenários possíveis tanto para o pagamento como para o não pagamento de multas.

Ao longo deste tempo lectivo, a investigadora privilegiou a autonomia dos alunos, ora solicitando a sua participação no quadro, como ocorreu por exemplo com o traçado de rectas secantes, ora solicitando a resolução individual de exercícios, deslocando-se nesse caso pelos seus lugares, esclarecendo-lhes as suas dúvidas.

Como a quantidade dos conteúdos a abordar e actividades a realizar era algo extensa, foi necessário solicitar aos alunos o adiamento em cerca de quinze minutos do intervalo que mediava os dois tempos lectivos, tendo estes acedido de boa vontade em fazê-lo.

O segundo tempo lectivo da aula foi dedicado à consolidação do conceito de derivada, nomeadamente à sua interpretação geométrica, pela realização de uma actividade baseada no programa de Geometria Dinâmica *The Geometer's Sketchpad*. A condução da actividade foi apoiada pela Ficha de Trabalho Nº 15, conforme apresentada no anexo 3. Os alunos foram organizados em grupos de três elementos e distribuídos pelos computadores presentes no laboratório de Matemática. Muito habituados quer ao programa quer à realização de actividades semelhantes, os alunos entregaram-se de forma entusiasmada à execução da tarefa solicitada. A actividade possuía o objectivo de proporcionar aos alunos a construção e utilização de uma ferramenta, dinâmica e manipulável, de consolidação da interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto. A sequência apresentada na figura 4.5 pretende ilustrar a exploração pretendida com esta actividade.

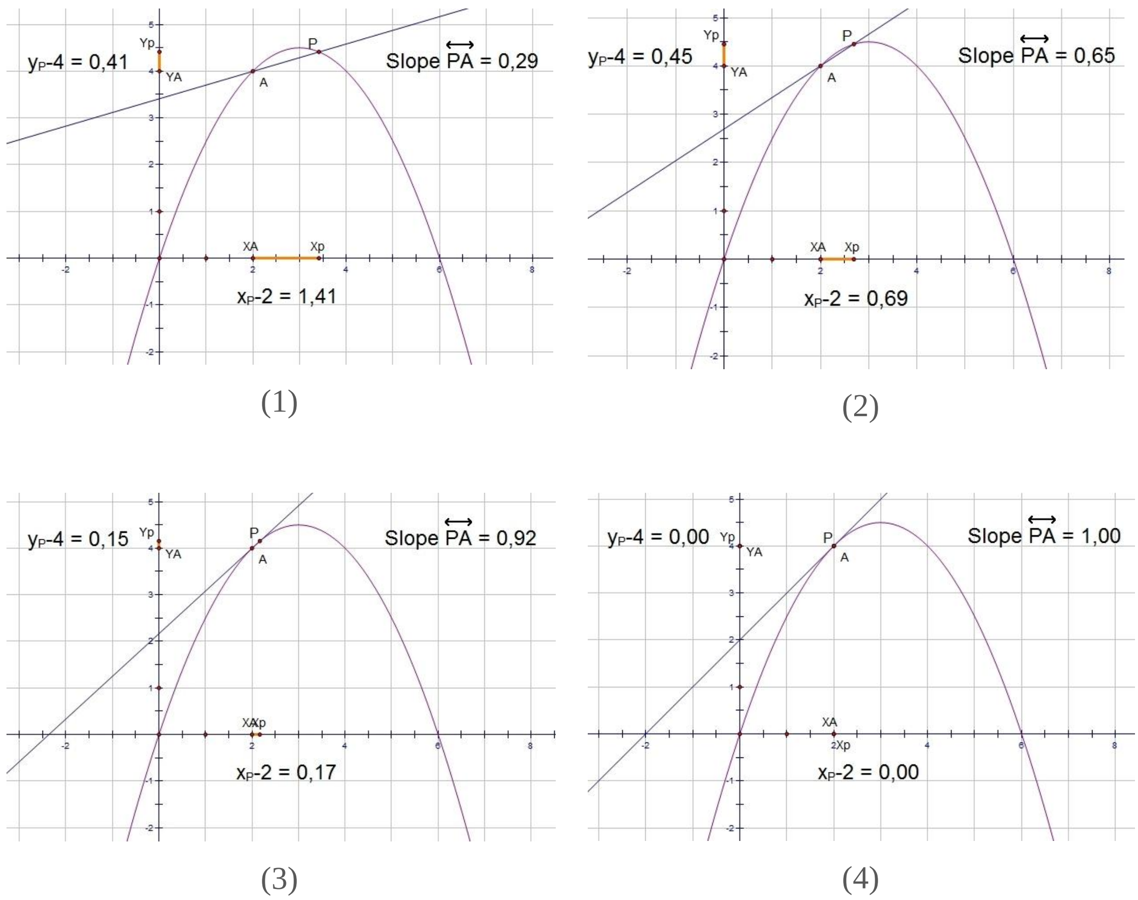


Fig. 4.5 – Sequência (leitura de 1 a 4) representativa da determinação da derivada (lateral direita) de uma função no ponto de abcissa 2, através da aplicação baseada no programa *The Geometer's Sketchpad.* O ponto A é fixo e o ponto P pode ser deslocado ao longo da curva com o auxílio do rato.

Os alunos realizaram a tarefa em muito menos tempo que o disponível, manifestando muito interesse e entusiasmo. Mostraram-se muito divertidos com a construção efectuada. A actividade pareceu proporcionar aos alunos uma sólida ferramenta de consolidação dos conhecimentos adquiridos.

Aula 2

Cerca de um terço do tempo desta aula foi dedicado à realização de uma revisão dos conteúdos leccionados no dia anterior e ao esclarecimento de dúvidas manifestadas pelos alunos aquando da resolução do questionário relativo à entrevista efectuada na tarde do dia anterior. As principais dúvidas e confusões observadas tinham que ver com a determinação da recta tangente a uma curva num ponto pela posição limite das rectas secantes e com o facto desta poder intersectar ou não (localmente ou não) a curva em mais algum ponto. O restante tempo lectivo foi dedicado à dedução de funções derivadas das funções quadrática, afim e também da função soma de duas funções. O quadro 4.2 apresenta um resumo dos conteúdos abordados e das respectivas actividades e estratégias implementadas nesta aula.

Conteúdos	Actividades / Estratégias
– Determinação da função derivada da função $f(x) = x^2$.	– Construção indutiva da expressão analítica da função derivada, a partir da determinação algébrica da derivada da função em alguns pontos e da construção de uma tabela de valores $(x, f'(x))$. Discussão geométrica quanto à validade dos valores obtidos. – Demonstração algébrica da expressão analítica inferida, pela determinação do limite da razão incremental para um ponto genérico x_0. Representação gráfica da função derivada.
– Função derivada de uma função.	– Apresentação da definição de função derivada de uma função.
– Determinação da função derivada da função $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$.	– Construção da função derivada através de argumentos geométricos. Representação gráfica da função derivada.
– Determinação da função derivada da função afim.	– Construção sequencial, através de argumentos geométricos, das funções derivadas das funções $f(x) = x, f(x) = ax$ e $f(x) = ax + b,$ com $a, b \in \mathbb{R}$.
– Determinação da derivada da função soma de duas funções.	– Apresentação da derivada da função soma de duas funções a partir da motivação conseguida pela análise das funções derivadas das últimas duas funções exploradas.
– Consolidação de conhecimentos	– Realização de alguns exercícios de aplicação de determinação de derivadas de funções afim.
– Proposta de trabalho extra-aula.	– Proposta de exercícios do Manual, conforme apresentados no anexo 4.

Quadro 4.2 - Resumo dos conteúdos, actividades e estratégias da aula 2.

Ao longo da aula os alunos mantiveram uma atitude atenta e interessada, quer no esclarecimento das suas dúvidas como na apresentação de novos conteúdos, tendo, no entanto, manifestado maiores dificuldades na respectiva assimilação e manuseamento. Os alunos pareciam revelar dúvidas e confusões crescentes, à medida que o nível de abstracção associado aos conceitos e às conexões entre as várias representações ia igualmente aumentando. Houve um aluno que, por exemplo, questionou a investigadora acerca da validade da expressão analítica da função derivada da função $f(x) = x^2$ ser dada por $f'(x) = 2x$, uma vez que atendendo à sua representação gráfica, a função derivada "não é tangente" à representação gráfica da função. Por seu lado e relativamente à análise da função derivada da função identidade, o João afirmou mais do que uma vez que a sua derivada "é a própria função", por associar o facto da recta tangente a qualquer ponto da função coincidir com a recta que representa a função. Alguns alunos manifestaram ainda dificuldades na execução de cálculos simples, como por exemplo o cálculo de quadrados de números naturais. Não obstante as dificuldades enumeradas, os alunos participaram activamente na aula, revelando, à medida que eram explorados exemplos concretos, um certo serenar das suas dúvidas e incertezas. A determinação geométrica, por exemplo, da derivada das funções $f(x) = ax$ e $f(x) = ax + b$ em todos os pontos do seu domínio, foi efectuada de forma imediata por quase todos os alunos da turma, uma vez realizado e interiorizado o mesmo procedimento para as funções $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x$.

Aula 3

Esta aula foi quase toda dedicada ao esclarecimento de dúvidas verificadas pelos alunos na resolução dos exercícios resolvidos em casa (ver anexo 4). Se por um lado os exercícios de determinação da t.m.v. pareceram não lhes ter causado muitos problemas, as afirmações presentes no exercício 3 foram particularmente muito discutidas e analisadas. Os exercícios 1 e 4 levantaram igualmente algumas questões, verificando-se sobretudo uma grande necessidade de esclarecimento de notações, conceitos e de respectivas conexões. A aula prosseguiu com uma revisão integradora dos conteúdos abordados na aula anterior e com a determinação com recurso à definição, da função derivada da função $f(x) = ax^2$. Os alunos apresentaram elevadas dúvidas quer na utilização de linguagem matemática, por exemplo na determinação de $f(x_0)$ e de $f(x_0 + h)$, como na compreensão dos procedimentos algébricos efectuados. A concluir, foi apresentada a derivada do produto de uma constante por uma função, exemplificando com as derivadas das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = ax^2$ e foram ainda realizados alguns exercícios de determinação de derivadas de funções polinomiais de segundo grau.

Aula 4

Esta aula, conforme já referido, sucedeu a uma outra, leccionada pela professora, cujos conteúdos consistiram na análise da relação existente entre o sinal da função derivada e o sentido de variação e os extremos da função. A aula leccionada pela professora possuiu sobretudo um carácter exploratório e foi baseada em actividades realizadas com recurso ao computador. O quadro 4.3 apresenta um resumo dos conteúdos abordados e das respectivas actividades e estratégias implementadas nesta aula.

Conteúdos	Actividades / Estratégias
– Determinação da função derivada da função $f(x) = x^3$.	– Apresentação e entrega aos alunos de uma ficha informativa com a construção da expressão analítica da função derivada, a partir da definição (ver anexo 3, Ficha informativa Nº5). Análise conjunta da ficha informativa.
– Consolidação dos conteúdos em estudo.	– Resolução de dois exercícios, um em que a partir de uma função dada era solicitada a equação da recta tangente ao seu gráfico num determinado ponto e outro em que se pretendia aplicar analiticamente os conhecimentos explorados na aula do dia anterior (sinal da função derivada e o sentido de variação e os extremos da função). Verificação gráfica da validade das resoluções analíticas.
– Determinação da função derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$.	– Construção da expressão analítica da função derivada, a partir da definição.
– Resolução de exercícios de aplicação.	– Determinação das derivadas de funções do tipo $\frac{a}{x}, a \in \mathbb{R}\ e\ x \neq 0$, pela conjugação da derivada determinada anteriormente e da derivada do produto de uma constante por uma função.
– Determinação da derivada da função $\|x\|$.	– Discussão acerca do domínio da função derivada e determinação da sua expressão pela utilização de conhecimentos anteriormente adquiridos.
– Consolidação de conhecimentos.	– Realização de alguns exercícios de aplicação envolvendo a determinação de funções derivadas de funções dadas e a respectiva interpretação geométrica (ver anexo 3 Ficha de Recuperação Nº 11).

Quadro 4.3 - Resumo dos conteúdos, actividades e estratégias da aula 4.

A aula decorreu de forma consistente no que diz respeito aos conhecimentos manifestados pelos alunos. Estes participaram de forma activa, respondendo prontamente e com segurança às solicitações da investigadora. As regras de derivação encontravam-se bem apreendidas pela generalidade dos alunos e mesmo o procedimento de determinação da expressão algébrica da derivada, a partir da sua definição, já não suscitou tanta confusão, comparavelmente à aula anterior. Os alunos pareciam começar a relacionar-se com os objectos e com os processos envolvidos nos conceitos em estudo. Apesar disso, notavam-se ainda, aqui e ali, algumas confusões que pareciam mais resultar de uma falta de concentração do que de efectivas dificuldades de compreensão. De referir, por exemplo, alguma confusão verificada na escolha da expressões algébricas de $f(x)$ ou de $f'(x)$, para a determinação dos respectivos valores num determinado ponto.

A exemplo do que sucedeu nas outras aulas, também nesta aula a investigadora privilegiou o trabalho autónomo dos alunos, solicitando sempre que possível a resolução individual dos exercícios propostos, deslocando-se pelos seus lugares para esclarecimento das suas dúvidas e, posteriormente, procedendo à discussão da respectiva resolução no quadro.

Esta constitui a última aula dedicada à exploração de novos conteúdos relacionados com os conceitos em estudo. Seguiram-se-lhe outras duas que antecederam a realização do teste nacional intermédio do GAVE e nas quais foram realizados exercícios de aplicação e de revisão dos conteúdos leccionados ao longo do ano lectivo, incluindo os conteúdos relacionados com derivadas.

Capítulo 5

Análise de resultados

Este capítulo tem por principal objectivo, analisar os processos de aprendizagem desenvolvidos pelos alunos, relativamente aos conceitos trabalhados nas aulas, segundo uma determinada estratégia de ensino/aprendizagem. Esta análise, baseada sobretudo nos dados recolhidos através de entrevistas e ainda em questões colocadas num teste de avaliação sumativa, constitui o elemento fundamental deste estudo. Paralelamente, são também reunidas evidências que permitam a aferição da correspondência inicialmente efectuada entre cada um dos alunos participantes no estudo e o nível de complexidade dos conceitos imagem manifestado, a ser apresentada na secção 6.2.

Tanto as questões colocadas nas entrevistas como no teste foram agrupadas de acordo com os seus principais objectos matemáticos em análise, segundo três categorias: *taxa média de variação*, *derivada de uma função num ponto* e *função derivada*. A respectiva análise de resultados que a seguir é apresentada encontra-se igualmente organizada nestas categorias, apresentada em cada uma das três seguintes secções. O quadro 5.1 expõe a correspondência estabelecida entre as várias questões colocadas (conforme anexos 1, 2 e 5) e as referidas categorias.

Categorias de objectos matemáticos	Questões		
	1.ª Entrevista	2.ª Entrevista	Teste
Taxa média de variação	1 ; 2	1A ; 1B	-
Derivada de uma função num ponto	3 ; 4 ; 5	1C ; 2	-
Função derivada	-	3 ; 4	1 ; 2

Quadro 5.1 – Organização das questões colocadas nas entrevistas e no teste segundo três categorias de objectos matemáticos.

Em cada uma das categorias, os dados foram analisados numa perspectiva cronologia e individual, tentando reproduzir de forma fiel os percursos manifestados por cada um dos alunos.

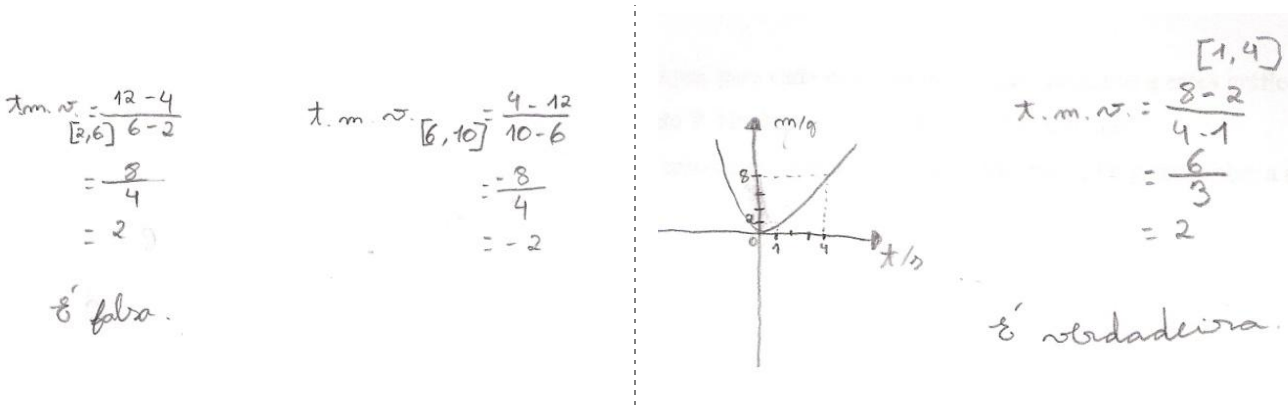
Ao longo das secções seguintes são apresentadas esquemas, figuras e cálculos efectuados pelos alunos no decurso da recolha de dados. Em alguns dos casos foram acrescentadas certas indicações, como indicações numéricas ou ainda nomes de funções, por forma a auxiliar a compreensão dos procedimentos e raciocínios efectuados.

5.1. Taxa média de variação

As questões que envolviam o conceito de t.m.v. apelavam a conhecimentos relativos tanto ao significado geométrico como ao significado físico. Enquanto a questão 1 da primeira entrevista apelava apenas ao seu significado geométrico, as restantes envolviam primordialmente o seu significado físico, ao explorar as relações possíveis de serem estabelecidas entre o sinal da t.m.v. num dado intervalo e a monotonia da função nesse intervalo.

Cristiana

Na primeira entrevista a Cristiana revela uma certa presença e consistência dos conceitos trabalhados. Assim e quando lhe é solicitado indicar se os valores de duas t.m.v. são iguais, quando claramente não o são, por possuírem sinais diferentes (valores de t.m.v. simétricos, determinados através da sua representação gráfica - questão 1), a aluna embora não parecendo ser capaz de identificar graficamente esse facto, efectua os cálculos formais pela utilização da razão incremental (figura 5.1 a), assim respondendo de forma correcta à questão. Quando colocada, por sua vez, perante duas implicações que relacionam a t.m.v. num dado intervalo e a monotonia da função nesse intervalo (implicações de sentido contrário), a aluna parece possuir alguma intuição ou mesmo certo conhecimento relativamente ao tema ao decidir-se correctamente quanto à respectiva veracidade, mas não é capaz de apresentar justificações matematicamente robustas. Assim, a Cristiana justificou o facto de a t.m.v. de uma função num dado intervalo ser positiva, no caso de a função ser crescente, apenas através da apresentação de um exemplo gráfico com concretizações numéricas e pela determinação do respectivo valor (figura 5.1 b), não tendo, por sua vez, apresentado qualquer justificação para a implicação contrária.



(a) *(b)*

Fig. 5.1 – Justificações apresentadas pela Cristiana na primeira entrevista: *a* – Cálculos para determinação de taxas médias de variação em resposta à questão 1; *b* - Justificação para o facto de, no caso de uma função ser crescente, a respectiva t.m.v. num dado intervalo ser positiva, (questão 2A).

Na segunda entrevista, a Cristiana revela muitas dificuldades em apresentar respostas e justificações válidas, evidenciando muitas inseguranças e confusões. Com efeito, parece possuir alguma intuição sobre os conceitos envolvidos, mas denota muitas dificuldades e uma ausência de consistência quer na sua verbalização e utilização, quer no estabelecimento de relações entre os objectos matemáticos neles implicados, como ainda na tradução entre as suas várias representações. Quando confrontada com a afirmação presente na questão 1A ("*Se a taxa média de variação de uma função no intervalo [1, 8] é 4, a taxa de variação para x=3 tem de ser positiva*"), a Cristiana responde prontamente "não tem de ser positiva... Acho que não tem mesmo de ser positiva", mas quando encorajada a apresentar um esboço que traduzisse o seu raciocínio, representa a função presente na figura 5.2, em que a imagem do objecto 3 é deliberadamente negativa, denotando a existência de alguma confusão entre a taxa de variação de uma função num ponto e o valor da função nesse ponto.

Ao tentar interpretar o seu próprio esboço, a Cristiana depressa se confunde, abandonando-o e voltando a optar por uma via algébrica. Assim e ao analisar a expressão da $t.m.v._{[1,8]} = \frac{f(8)-f(1)}{8-1}$, parece revelar alguma confusão entre os significados de t.m.v. e de taxa de variação, ao afirmar que, uma vez que o denominador era positivo, o numerador também teria de o ser,

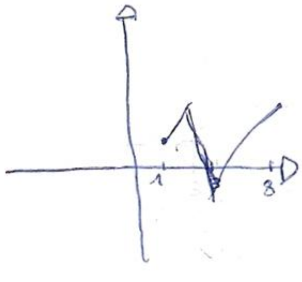


Fig. 5.2 – Esboço da Cristiana para justificar afirmação 1A (2.ª Entrevista).

para que a t.m.v. desse um valor positivo, e que então, nesse caso, "o 3 tem de ser positivo", embora ressalvando de imediato "não...Espere, 'stôra'...". Em resposta à investigadora que a tenta esclarecer quanto ao significado gráfico da t.m.v. no intervalo pretendido, a Cristiana desenha o esboço apresentado na figura 5.3, representando a correspondente recta secante, mas omitindo a função que lhe está associada e evidenciando algumas incertezas e confusões:

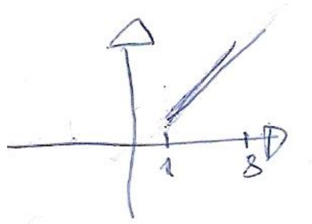


Fig. 5.3 – Esboço da Cristiana para $t.m.v._{[1,8]}$.

Cristiana: Graficamente deve ser assim [a desenhar gráfico da figura 5.3], ... Deve ser uma... Uma rect...

Entr.: Sim... A taxa média de variação deve ser igual ao quê da recta?

Cristiana:... Ao f(8)-f(1)...

Entr.: ... Sobre 8-1, não é? Mas esta razão determina o quê daquela recta?

Cristiana: o... Decliv...

Entr.: O declive!

Cristiana: Sim. Então tem de ser positivo este aqui... O declive [referindo-se ao declive correspondente à $t.m.v._{[1,8]}$]. Ele vai dar um declive positivo...

Entr.: Hum! Que é igual a 4, até. Sim.

Cristiana: Sim. Por isso o 3 também é positivo. O x=3. Porque se é o declive, vai passar aqui pela... Recta [indicando a recta representada na figura 5.3]. Vai ser a recta tangente... Não, o declive... Da recta tangente. Isto é o declive da recta tangente [referindo-se à recta traçada].

Entr. Esta recta que recta é que é? Num intervalo... Quando estamos a calcular a t.m.v. num intervalo, de 1 a 8, que recta é que nós temos? Tangente?!

Cristiana: Quando estamos a calcular, depois vai nos dar a... Tan..., Vai nos dar o declive da recta tangente...

Entr.: No intervalo de 1 a 8?

Cristiana: ... Eu acho que sim...

Entr.: Tangente ao gráfico da função em que ponto?

Cristiana: Em que ponto?... Hum... Se está aqui 8 e aqui é 1, se é uma recta tangente de declive 4, faz de conta que está [supondo que a recta apresentada no gráfico 5.3 tem declive 4], ... [reflectindo] A tangente só bate num ponto. [E logo hesitando] Não...

Entr.: Em qual?

Cristiana: No 3. Não... Vai... Já estou a baralhar...

A Cristiana parece ter uma noção dos conceitos de t.m.v. e taxa de variação envolvidos, mas não se mostra capaz de os expor de forma clara, parecendo adicionalmente confundir a recta secante esboçada (figura 5.3) com o gráfico da função que lhe está associada.

Incentivada pela investigadora a esboçar uma outra função para esclarecer a aparente confusão entre recta secante e recta tangente a um ponto do gráfico, a Cristiana representa a função quadrática reproduzida na figura 5.4, mas ainda mantém as suas dificuldades. A aluna refere por exemplo que a forma de obtenção a recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa 3 seria a de ir fazendo *"rectas cada vez mais próximas da recta que já está cá, da secante [referindo-se à recta correspondente à* $t.m.v._{[1,8]}$*]"*. Através de ajuda, a Cristiana acaba por ficar esclarecida quanto ao significado geométrico da recta tangente a um gráfico de uma função num ponto, mas torna a se basear apenas neste exemplo concreto para se decidir pela veracidade da afirmação inicial, afirmando que sim, que a taxa de variação para x=3 tem de ser positiva.

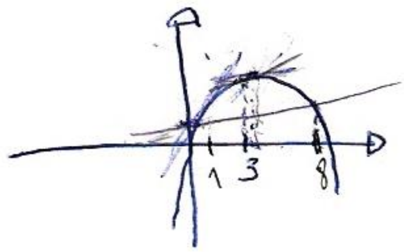


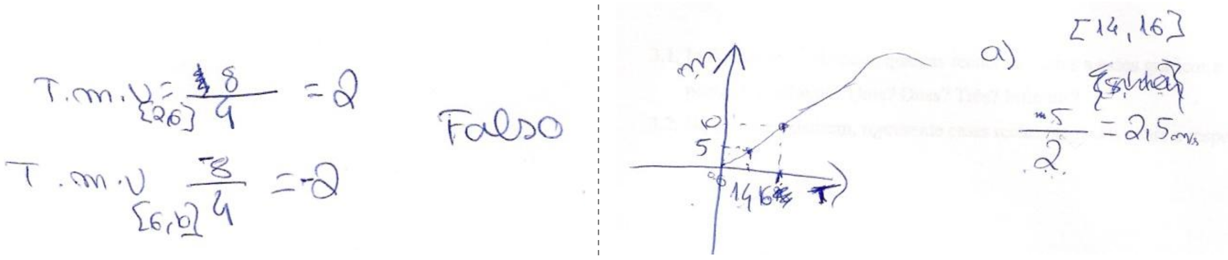
Fig. 5.4 – Esboço efectuado pela Cristiana para tentar distinguir os conceitos de t.m.v. e de taxa de variação.

A Cristiana ainda experimenta alguma confusão entre o conceito de recta secante e o seu conceito imagem de recta tangente a uma curva, ao referir que no caso da representação gráfica presente na figura 5.2, a $\mathrm{t.m.v.}_{[1,8]}$ não podia ser 4, pois "não dava para passar a recta [secante]" por esta não poder intersectar o gráfico da função. Apenas através da investigadora, que lhe apresenta um contra-exemplo para a afirmação em causa, é que a Cristiana consegue entender a questão colocada e apresentar uma resposta correcta.

Perante a afirmação da questão 1B ("*Uma função pode ser monótona crescente e ter taxa média de variação negativa num dado intervalo*"), a Cristiana começa por esboçar o gráfico de uma função afim de declive positivo e por afirmar a falsidade da afirmação, justificando-se, no entanto incorrectamente, com: "porque a t.m.v. é menor que zero, se tiver imagens negativas [referindo-se à função]". Ao ser então confrontada pela investigadora com o esboço de uma função crescente e com valores negativos em todo o seu domínio, a Cristiana sente necessidade de atribuir valores a dois dos seus pontos e de efectuar os cálculos da t.m.v. no respectivo intervalo, para assim concluir que o seu valor é positivo. Quando a orientadora sublinha o facto de que o resultado obtido é apenas relativo a um exemplo concreto, a Cristiana volta-se para o esboço inicialmente feito da função afim e repete o procedimento efectuado, voltando a concluir que "ela [t.m.v.] aqui também é positiva". Apenas orientada pela investigadora, acaba por analisar o sinal da razão incremental para um caso genérico de uma função monótona crescente e por concluir da veracidade da afirmação.

Rita

Na primeira entrevista, a Rita exibiu, curiosamente, um padrão de respostas em tudo idêntico ao apresentado pela Cristiana, igualmente privilegiando uma via algébrica e denotando uma certa incapacidade em manipular objectos matemáticos mais avançados. Assim, utiliza uma estratégia algébrica para averiguar a relação existente entre as duas t.m.v. apresentadas na questão 1, ao determinar os respectivos valores através da razão incremental (figura 5.5 *a*) e na questão 2, decide-se igualmente de forma correcta sobre a veracidade das afirmações apresentadas, também justificando o facto de a t.m.v. de uma função num dado intervalo ser positiva, no caso de a função ser crescente apenas pela apresentação de um exemplo concreto (figura 5.5 *b*) e também não apresentando qualquer justificação para a implicação de sentido contrário.



(a) *(b)*

Fig. 5.5 – Justificações apresentadas pela Rita na primeira entrevista: *a* – Cálculos para determinação de taxas médias de variação em resposta à questão 1; *b* - Justificação para o facto de, no caso de a função ser crescente, a respectiva t.m.v. num dado intervalo ser positiva.

Na segunda entrevista, a Rita parece revelar uma certa familiaridade com os objectos matemáticos envolvidos e alguma destreza na tradução entre representações, embora nem sempre os raciocínios construídos se encontrem consistentemente suportados em sólida argumentação matemática. Perante a afirmação da questão 1A ("*Se a taxa média de variação de uma função no intervalo [1, 8] é 4, a taxa de variação para x=3 tem de ser positiva*"), a Rita começa por se assustar, proferindo um espontâneo: "Eh pá!", mas logo se concentra, raciocina durante alguns segundos e responde com segurança: "Acho que não. Pode ser negativa, porque é a média; e num certo momento pode estar a decrescer". Por solicitação da investigadora, a Rita prontamente traça o exemplo apresentado na figura 5.6:

> Rita: ... Começar no 1... Sei lá, pode vir assim e depois voltar a subir. E neste bocado aqui [traço a cheio na figura 5.6] ela está a descer.

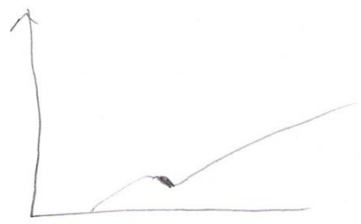


Fig. 5.6 – Esboço da Rita para justificar afirmação 1A.

Quando incentivada a confirmar a condição para a $t.m.v._{[1,8]}$ no exemplo por si apresentado, a aluna mostra conhecer os conceitos definição envolvidos, ao afirmar que esta “Pode ser positiva!” e acrescentando “Sim, no global, mas num ponto pode ser negativa!”.

Relativamente à questão 1B (“*Uma função pode ser monótona crescente num dado intervalo e ter taxa média de variação negativa nesse intervalo*”), a Rita, apesar inicialmente ter respondido “Acho que é falsa. Acho eu...”, revelou uma maior dificuldade em justificar o seu raciocínio. Após um período de reflexão e algumas tentativas ténues e inacabadas de justificação, a Rita apenas conseguiu justificar-se com: “Não; é falsa! Porque se a função vai sempre a crescer, não pode haver, ehh... A t.m.v. também vai ter de ser... Vai ter de ser positiva”.

Apenas com intervenção da investigadora, através do esboço de uma função f crescente [com indicação dos pontos genéricos $\left(a, f(a)\right)$ e $\left(b, f(b)\right)$] e da análise do sinal da respectiva razão incremental no intervalo $[a, b]$, a Rita consegue provar o valor lógico da afirmação.

João

O João resolveu as questões colocadas na primeira entrevista de forma muito expedita, revelando possuir um bom nível de tradução entre representações e de inter-relação dos conceitos envolvidos. Dos três alunos, foi o que apresentou argumentos mais completos, embora evidenciando claras lacunas no rigor na escrita e na tradução matemática. É o caso da sua resposta à questão 1, relativa à verificação da igualdade de duas t.m.v. O João foi o único aluno que percebeu imediatamente, por identificação geométrica, que os dois valores não poderiam ser iguais, uma vez que as respectivas rectas secantes possuíam declives de sinais contrários (declives com valores simétricos). No entanto, na sua resposta, o João refere-se incorrectamente a “declives inversos” (figura 5.7).

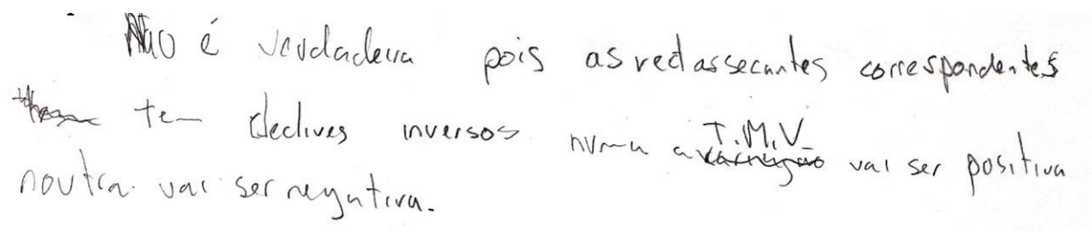


Fig. 5.7 – Justificação apresentada pelo João na Questão 1 (1.ª entrevista).

Igualmente, o João não apresentou quaisquer dificuldades nas respostas às duas implicações envolvendo a monotonia num dado intervalo e o respectivo sinal da t.m.v. tendo, no entanto e mais uma vez, evidenciado alguma falta de rigor matemático. A figura 5.8 reproduz as respostas apresentadas às duas afirmações.

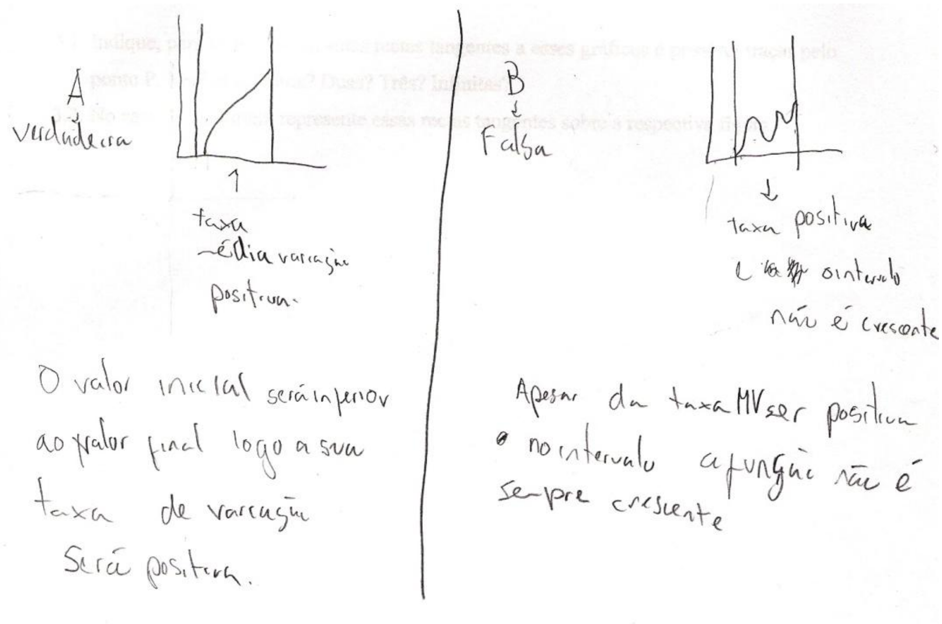


Fig. 5.8 – Justificações apresentadas pelo João para as afirmações da Questão 2 (1.ª entrevista): A: "*Se uma função é crescente num certo intervalo do seu domínio, a taxa média de variação nesse intervalo é positiva*"; B: "*Se a taxa média de variação de uma função num certo intervalo do seu domínio é positiva, a função é crescente nesse intervalo*"

Assim, na justificação da afirmação A, o João fala de "*valor inicial*" e "*final*", mas não especifica a que valor se está a referir e ainda conclui que t.m.v "*será positiva*" sem, no entanto o justificar adequadamente. Da mesma forma, na resposta à afirmação B, ao querer expressar que a função não é monótona crescente no intervalo indicado, o João refere incorrectamente que "o *intervalo não é crescente*" (frase sob o esboço gráfico).

Na segunda entrevista, o João revelou inicialmente maiores dificuldades parecendo, desta feita, revelar algum esquecimento relativamente aos objectos matemáticos trabalhados. Uma vez ajudado na sua clarificação, o João denota alguma agilidade de raciocínio e facilidade na respectiva aplicação. Tal é verificado, por exemplo, na sua resposta à afirmação 1A, na qual confunde taxa de variação num ponto com o valor da função nesse ponto, ao traçar um esboço de uma função em que a imagem do objecto “3” é negativa (curva *1* na figura 5.9), revelando subsequentes dificuldades de clarificação dos conceitos:

Entr.: Mas estás a dizer que o valor da função é negativo quando x=3?

João: Eu... A “‘stôra’” está aqui a querer dizer com taxa de variação é o quê? Que ela... Que ela é o quê?

Entr.: O que é que graficamente dá a taxa de variação?

João: Taxa de variação... [silêncio]

Entr.: Comecemos pela t.m.v. Graficamente como é que se determina a t.m.v.?

João: Ah, é o... Como é que é? Este valor... Não!... A diferença entre entres dois a dividir pela diferença entre estes dois [a indicar correctamente no gráfico].

Entr.: Sim, e depois dava o quê, graficamente?

João: Dava-nos ahh... A derivada? Não, ahh... A recta secante, não era?

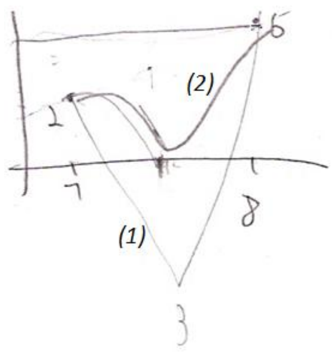


Fig. 5.9 – Esboços gráficos apresentados pelo João em resposta à afirmação 1A (2.ª entrevista): *(1)* - Esboço feito inicialmente; *(2)* – Esboço relativo à resposta final.

Relativamente ao significado geométrico da taxa de variação instantânea, o João apenas refere a ideia intuitiva de limite que havia sido desenvolvida nas aulas pela exploração de dois exercícios concretos: “Ah! Tínhamos que ir procurar um valor um bocadinho... Um bocadinho atrás do 3, não era?... Procurar um 2,9999”.

Uma vez reavivados os conceitos, o que foi apenas conseguido com a ajuda da investigadora, o João rapidamente concebe e desenha o exemplo representado pela curva *2* na figura 5.7, para justificar a não necessidade de a taxa de variação ser positiva em x=3, quando $t.m.v._{[1,8]} = 4$ (notar, na figura, o esboço da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 3).

Já no caso da questão 1.B onde se afirmava que uma função poderia ser monótona crescente e ter t.m.v. negativa num dado intervalo, o João mostrou-se determinado: “Não, é falso. Nunca pode!”. A sua justificação é análoga à apresentada na primeira entrevista, carecendo igualmente de algum rigor nos argumentos apresentados:

Fig. 5.10 – Esboço apresentado pelo João para avaliar a afirmação 1B (2.ª entrevista).

João: Porque, ... Se é crescente, o valor inicial da... Da função nesse intervalo vai ser sempre inferior ao final... Ao y de... Final do intervalo.

Entr.: E portanto...?

João: Ou seja, este... Este valor vai ser sempre menor do que este [indicando correctamente na figura 5.10 respectivamente os valores inicial e final representados] e nunca pode ser negativa. A taxa média nesse caso vai ser positiva, sempre!

Entr.: Hum. Porque é igual a quê, a t.m.v?

João: Vai ser igual ao declive da recta, não?

O João denota conhecer os conceitos envolvidos, mas apresenta dificuldades em traduzi-los para linguagem matemática formal.

5.2. Derivada de uma função num ponto

As questões referentes ao conceito de derivada num ponto envolviam três dimensões: a primeira relativa ao traçado de rectas tangentes a curvas, num determinado ponto (questões 3 da 1.ª entrevista e 1C da 2.ª); a segunda também envolvendo a construção de rectas tangentes, mas identificando-as com a derivada de uma função num ponto (questão 4 da 1.ª entrevista); e a terceira envolvendo a manipulação conjunta dos conceitos envolvidos (questões 5 da 1.ª entrevista e 2 da 2.ª). Nas duas entrevistas figuravam questões muito idênticas, com o objectivo de averiguar a evolução manifestada pelos alunos entre esses dois momentos.

As questões presentes na primeira entrevista levantaram elevadas dúvidas aos alunos, limitando fortemente a respectiva capacidade de resposta. No sentido de melhor tentar compreender as suas dificuldades e raciocínios, a investigadora permitiu a existência de algum diálogo. Desta forma, o desempenho manifestado por cada um dos alunos não poderá ser alvo de uma análise individual, devendo, ao invés, ser entendido à luz das várias intervenções efectuadas.

Relativamente ao traçado de rectas tangentes a uma curva num determinado ponto, os alunos apresentaram muitas dificuldades. Em resposta à questão 3, na qual eram apresentadas três curvas, cada uma com a indicação de um ponto P, pelo qual deveria(m) ser traçada(s), no caso de existir(em), a(s) respectiva(a) recta(s) tangente(s) (figura 5.11), os alunos procuraram encontrar tangentes que estivessem de acordo com o seu próprio bom senso, parecendo basear-se na ideia clássica de tangente a uma circunferência.

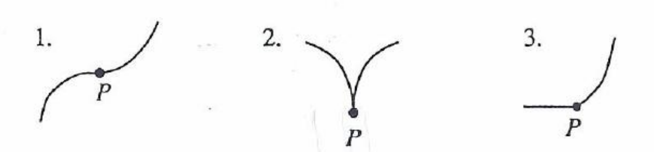


Fig. 5.11 – Curvas apresentadas na questão 3 (1.ª entrevista).

Assim, os três alunos afirmaram ser possível traçar infinitas tangentes no caso da curva 2 e uma no caso da curva 3, representando-as de forma idêntica à efectuada pela Rita, conforme o esboço apresentado na figura 5.12.

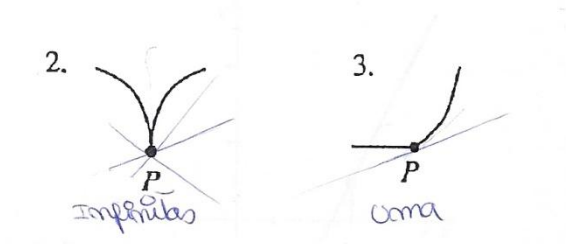


Fig. 5.12 – Proposta apresentada pela Rita para as tangentes às curvas 2 e 3 no ponto P.

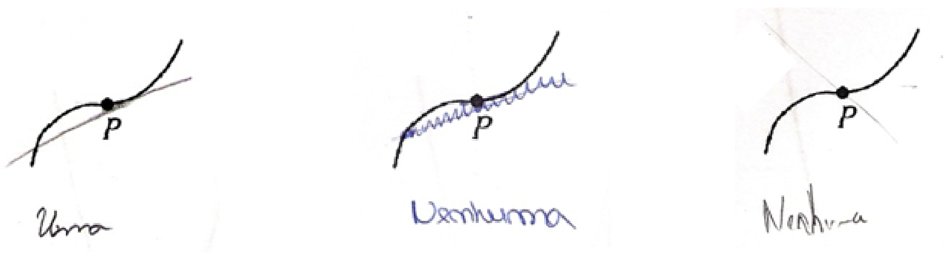
Enquanto as tangentes às curvas 2 e 3 não pareceram constituir um problema sob o ponto de vista dos alunos, já o traçado da tangente ao ponto P no caso da curva 1 foi alvo de muitas dúvidas. Apenas no caso desta curva, os alunos decidiram recorrer aos conhecimentos adquiridos relativos à construção da recta tangente pelo limite das correspondentes rectas secantes. No entanto, a maior dúvida residia em saber se a recta tangente procurada poderia ou não intersectar a curva em mais algum ponto, para além do ponto de tangência. A Rita, por exemplo, defendia, por esta razão, a inexistência da recta tangente a P, argumentando: "Porque olha aquela cena dos pontinhos. Tu vais cada vez te aproximando mais, não é? Do ponto grande [referindo-se ao ponto P]. Se fores aqui cada vez te aproximando mais... Faz aqui um pontinho e agora tenta fazer uma tangente... Vai tocar num dos outros lados da função".

Os alunos pareciam confundir a ideia implícita na construção geométrica da tangente, segundo a qual um dos pontos se vai aproximando daquele no qual se pretende obter a recta tangente, tendendo, no limite, para a respectiva coincidência num único ponto, com a necessidade de a recta tangente apenas intersectar a função num só ponto.

Ao tentar desconstruir as muitas dúvidas existentes, a investigadora pede aos alunos para recordarem os conteúdos abordados na aula desse dia, nomeadamente a evolução histórica do conceito de tangente a uma curva e a actividade computacional realizada. O João recorda-se rapidamente das datas mencionadas, mas parece ter dificuldades em reconstituir de forma clara o método de construção da recta tangente pela posição limite das rectas secantes. A investigadora recorda com os alunos este processo de construção, parecendo, no entanto, contribuir para aumentar ainda mais as suas dúvidas quanto à possibilidade de a recta tangente intersectar a função em mais pontos para além do ponto de tangência, pois tal não ocorria no exemplo apresentado:

> Rita: Então aí [referindo-se à vizinhança do ponto de tangência] não pode ter dois pontos!

Mesmo esclarecendo o facto de esta ser uma construção local, relembrando o contra-exemplo fornecido na aula e ainda esclarecendo a dúvida da Rita: "É que eu não me lembro se, a professora ao fazer o gráfico, disse se podia ou não podia [a tangente intersectar o gráfico para além do ponto de tangência]", os alunos não foram capazes de responder correctamente a esta questão. As respostas apresentadas pelos alunos encontram-se reproduzidas na figura 5.11. A Cristiana que se manteve em silêncio, apresentou uma possibilidade para a tangente, parecendo basear-se na correspondente imagem clássica. A Rita, apesar de ainda tentar esboçar uma tangente, acabou por se decidir pela sua não existência. Por seu turno, o João também optou pela não existência da recta tangente à curva no ponto P, apesar de ter ensaiado uma solução no sentido clássico do termo (ver recta semi-apagada na resposta do João na figura 5.13).



(*Cristiana*) (*Rita*) (*João*)

Fig. 5.13 – Possibilidades de tangente ao ponto P à curva 1 (Questão 3) apresentadas pelos alunos.

Os alunos mantêm a dificuldade relativa ao traçado de rectas tangentes a uma curva num ponto, na resolução do exercício 4. Adicionalmente, não se recordam do conceito de derivada:

> Rita: "A derivada, ... Eu já não me lembro o que é...!

O João acaba por o recordar, embora ainda sinta necessidade de confirmação: "'stôra', derivada é... É o declive...É o declive da recta tangente...?". Nesta questão era necessário determinar geometricamente a derivada no vértice de uma parábola e num ponto pertencente a uma recta com declive positivo. A Rita, sem explicitar as suas razões, lança-se na determinação do vector director da recta representada, fazendo-o de forma incorrecta, primeiro atribuindo-lhe as coordenadas do ponto de intersecção com o eixo dos xx e seguidamente, após a chamada de atenção do João, as coordenadas do próprio ponto no qual se pretendia a derivada. Por seu lado, o João, reflecte: "Aqui há muitas rectas tangentes, qual delas é que nós usamos? Quer dizer, eu acho que há!", referindo-se a várias rectas concorrentes à recta dada no ponto pretendido. Reflectindo quanto à derivada no ponto pertencente à recta, a Rita arrisca: "Nesta aqui não há recta tangente, logo não pode haver derivada" e insiste: "aqui não podes pensar numa tangente, não consegues". A Rita parece estar a ser muito condicionada pela ideia clássica da tangente, nomeadamente no que diz respeito ao facto de esta apenas possuir um ponto em comum com a respectiva curva. O João acaba por concordar com a Rita e todos aceitam a não existência de recta tangente ao ponto P. A resposta da Cristiana que, mais uma vez, se manteve em silêncio, encontra-se apresentada na figura 5.14.

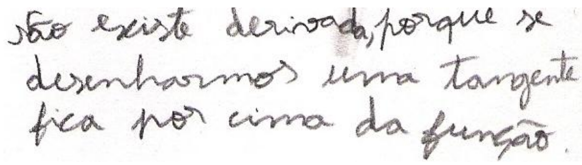


Fig. 5.14 – Resposta fornecida pela Cristiana quando solicitada a determinar geometricamente a derivada num ponto pertencente a uma recta (Questão 4, 1.ª entrevista).

A determinação da tangente ao vértice de uma parábola pareceu não levantar tantas dúvidas entre os alunos, tendo estes, no entanto, construído a recta com recurso, não à posição limite das rectas secantes, mas à ideia clássica de tangente a uma circunferência. Inicialmente, o João ainda foi induzido em erro pelo tamanho do ponto assinalado e considerou rectas com declive diferente de zero como rectas "tangentes" ao vértice da parábola, julgando tratarem-se de rectas que apenas intersectavam a curva nesse ponto, tendo rapidamente se apercebido do seu equívoco. Assim, todos desenharam correctamente a respectiva recta tangente à curva no ponto solicitado, sendo que apenas a Rita e o João se referiram ao valor nulo da derivada. A Cristiana apenas referiu o facto da existência da derivada pela existência da tangente, não especificando o seu valor.

A questão 5 consistia num exercício de aplicação conjunta dos conceitos de derivada de uma função num ponto, de recta tangente a uma curva e de declive de uma recta (ver figura 5.15) e originou muitas dúvidas nos alunos.

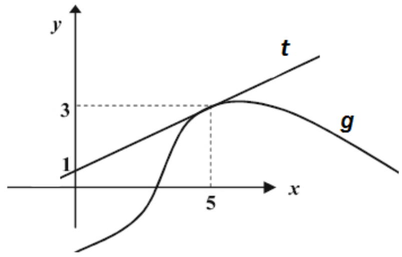


Fig. 5.15 – Representação gráfica apresentada na questão 5 (1.ª entrevista), em relação à qual era solicitado o cálculo de g'(5).

Inicialmente o João não entendeu a questão colocada, pois não se recordava de significado da notação utilizada para a derivada:

João: "Não me lembro disso do g' e isso..."

A investigadora permitiu a consulta do caderno diário e dos respectivos apontamentos tomados na aula. Os alunos debruçaram-se sobre a definição de taxa de variação ou derivada de uma função num ponto, apresentando várias dúvidas relativamente à sua interpretação (João: "Então aqui onde está o zero [x_0], substituímos por quê?"; "E no x?"). Esclarecendo as suas dúvidas, a investigadora tentou orientá-los no sentido da resolução geométrica do problema, mas, provavelmente muito influenciados pela exploração do conceito de derivada num ponto x_0, efectuada na aula através do cálculo de vários valores da razão incremental no ponto x_0, em que a variável x assumia valores cada vez mais próximos de x_0, os alunos insistiam nessa forma de resolução. Se a Rita e Cristiana pareciam abandonar essa via, por se aperceberem da impossibilidade de conhecer os valores da função noutros pontos para além do representado, o João insistia, confundindo a função *g* com a recta tangente *t*:

João: Descobrimos a... A expressão... Ai, como é que se diz? Ahh... O coiso desta função,... Ahh... Não é o declive, é a... Expressão da função; a expressão da função, substituímos por 4,9999 e podemos saber o ponto, não?

Entr.: Mas como é que vão descobrir a expressão da função?

João: Temos dois pontos, 'stôra' [indicando os dois pontos conhecidos da recta *t*].

Entr.: Ah, da recta?

João: Sim, da recta. Exacto.

Entr.: Ah, a expressão da recta é diferente. Isso sim...

João: Conseguimos... depois fazemos o 4,9999. Não? Deve ser... Não?

O João apercebe-se do equívoco entre as duas curvas, mas mantém a sua linha de raciocínio: "'Stôra', eu continuo a achar estranho. Nós não temos esses valores [valores da função g em pontos próximos do ponto de coordenadas (5,3)]. A 'stôra' lá na outra ficha [Ficha de Trabalho 32A] deu-nos os valores e neste agora não nos deu. Aqui, 'stôra' [indicando o exercício 2 da referida ficha], a 'stôra' aqui deu-nos uma tabelinha ao lado com os 'valorzinhos'".

Os alunos mantêm um diálogo na procura da resolução do exercício, com o João a continuar a manifestar uma forte influência do processo de determinação da derivada de uma função num ponto explorado nas aulas, pela determinação de alguns valores da razão incremental:

> João: Deve ter alguma coisa a ver com a expressão da *t*, não?
>
> Rita: Mas estás a ver, aqui é tangente [referindo-se ao facto da recta *t* ser tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 5].
>
> João.: Mas tangente só toca ali no (5,3). O... O *y* por exemplo do 4,999 da *t* não vai ser igual ao *y* da *g*.
>
> Entr.: Mas para quê que vocês precisam do 4,999?
>
> João: Porque é um valor próximo.
>
> Entr.: Mas isso é quando se está a tentar encontrar... Sim, é verdade, é quando se está a tentar encontrar a recta tangente.
>
> Rita: Nós já temos a tangente...
>
> Entr.: Vocês já têm a tangente!
>
> Rita: Pois, realmente!
>
> João: Mas não é esta [apontando no caderno a razão incremental]? Não vamos ter que substituir os valores nesta função? Incremental?

Só com a orientação da investigadora no sentido da resolução geométrica do problema e da identificação das relações existentes entre os conceitos envolvidos, foi possível avançar na resolução na questão. Nesta fase, o contributo da Rita revelou-se fundamental, uma vez que a Cristiana se mantinha em silêncio e o João continuava a apresentar dificuldades de compreensão das referidas relações:

> Rita: Então é só sabermos o declive da recta tangente.
>
> João.: E substituirmos o x pelo 5.
>
> Entr.: Achas, Rita?
>
> Rita: Não... Uhm...
>
> João: Porque... Com isso de descobrir o declive, vamos descobrir o declive da recta *t*, e não nos vai dar o valor de... Para o 5.
>
> Rita: Então, mas a 'stôra' não vai ... O declive da nossa recta tangente ia ser a derivada.
>
> João: Mas a derivada de 5! Falta a derivada de 5!

Rita: Não, porque a derivada já é o 5', [e emendando] o g', acho eu...

O João acaba por reflectir uma pouco e por esclarecer peremptoriamente as suas dúvidas e todos calculam o declive da recta *t*, identificando o valor obtido com o valor da derivada no ponto pedido (Rita: "A derivada é igual ao declive da tangente. Se o declive da tangente é $\frac{2}{5}$, a derivada vai ser $\frac{2}{5}$!").

Na segunda entrevista os alunos parecem revelar um maior à-vontade com os objectos matemáticos em questão, ainda que para isso, às vezes tenham de ser inicialmente auxiliados pela investigadora.

Cristiana

É o caso da Cristiana que apesar de ainda manter algumas características próprias da tangente a uma circunferência relativamente à determinação de tangente a uma curva num ponto, também já começa a integrar e a utilizar o processo de construção pelo limite das correspondentes rectas secantes. Quando confrontada com a questão 1C, na qual se deve decidir se as rectas *r* e *s* apresentadas são respectivamente rectas tangente aos gráficos das funções *f* e *g* num determinado ponto (figura 5.16), a Cristiana, numa primeira abordagem, afirma que a recta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *a*, justificando-se com:

Cristiana: Porque ela [a função] é uma... Um bico que.... Ela [a recta tangente] passa só aí. É como se fosse a... Não é a circunferência porque ela é um bico, mas também só passa num ponto.

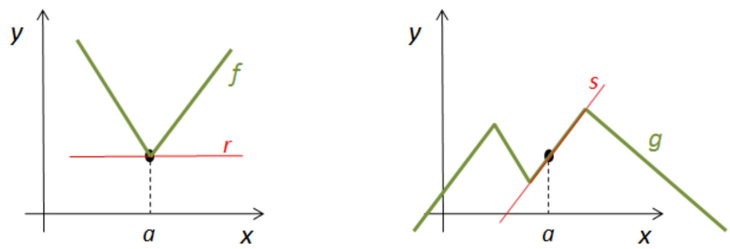


Fig. 5.16 – Representações gráficas apresentadas na questão 1C (2.ª Entrevista).

No entanto, e em resposta à investigadora que lhe pede para recordar o processo discutido nas aulas de determinação de uma recta tangente a uma curva num ponto, a Cristiana, após uma breve reflexão, faz referência à ideia de limite envolvida:

Cristiana: É fazer o... A aproximação.

A figura 5.17 apresenta a construção efectuada pela Cristiana, ainda que ajudada pela investigadora, para a determinação da recta tangente ao gráfico na função *f* no ponto de abcissa *a*. A Cristiana apresenta alguma dificuldade em aceitar a coincidência entre uma parte das rectas secantes traçadas e o próprio gráfico da função, parecendo sentir a necessidade da existência de um movimento infinitesimal relativo à posição das rectas secantes, até à coincidência "no limite" com as semi-rectas que representam a função:

> Cristiana: Pois, ela [recta secante] vai se movendo... Se for mais [referindo-se à cada vez maior proximidade dos pontos]... A tangente vai ser praticamente o próprio gráfico.

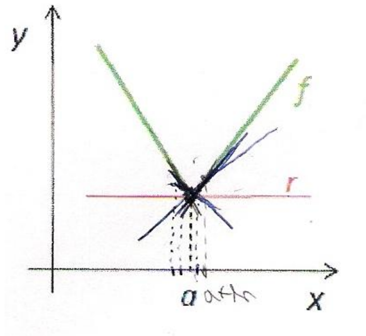


Fig. 5.17 – Construção efectuada pela Cristiana para determinar a recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa *a*.

Uma vez esclarecidas as dúvidas quanto à necessidade de as rectas secantes serem definidas por dois pontos pertencentes à função e após a evidência presente na sua própria construção, a Cristiana decide-se claramente pela recta *r* não ser uma recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *a*.

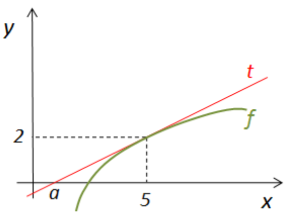
No caso da função *g*, e beneficiando da destreza adquirida pela análise do gráfico da primeira função, a Cristiana toma a iniciativa de investigar a posição limite das rectas secantes que passam no ponto *a* e num ponto cada vez mais próximo da sua vizinhança. A aluna decide-se, com firmeza, pela coincidência das rectas secantes com a recta que nesse troço representa o gráfico da função e, consequentemente, pela correcta veracidade da afirmação.

Igualmente no caso da questão 2 na qual, à semelhança da questão 5 da 1.ª entrevista, era necessário relacionar os conceitos de recta tangente a uma curva, de derivada de uma função num ponto e de declive de uma recta (figura 5.18), a Cristiana apresentou algumas dificuldades iniciais que foram sendo progressivamente ultrapassadas com alguma ajuda da investigadora. Assim, a Cristiana parece recorrer inicialmente, embora de forma hesitante, a procedimentos pré-determinados:

Cristiana: Fazia-se... Aquele do... Mas isso era para a equação da recta... Uhm... Acho que isto era... Não, isto era para a equação da recta tangente. Nós damos o T e depois...

Entr.: ... O ponto de tangência...

Cristiana: ... Tínhamos a abcissa... Mas nós já temos aqui um...



$f'(5) = \frac{1}{2}$

Fig. 5.18 – Esquema apresentado na questão 2 (2.ª Entrevista), na qual era solicitado o cálculo do valor a.

Depois parece encontrar-se na direcção correcta ao referir o conhecimento do declive da recta e a necessidade da escrita da sua equação, mas, logo revela alguma confusão ao afirmar que o declive da recta é 2 (por sugestão de um exercício realizado nas aulas envolvendo declives de rectas perpendiculares) e ainda que ele é $\frac{2}{5}$, "porque é a coordenada do y a dividir pela do x".

Quando questionada acerca do significado, no contexto do problema, da derivada da função *f* no ponto de abcissa 5, a Cristiana refere-se, de forma algo despropositada, ao significado geométrico, não relativo à função *f*, mas à respectiva função derivada, *f'*:

Cristiana: A derivada no ponto 5?

Entr.: Sim.

Cristiana: Que o gráfico... Quando vai, ehhh... Vai passar no $\frac{1}{2}$.

Entr.: Vai passar no $\frac{1}{2}$...?

Cristiana: No y. Quando é a derivada. Quando está no ponto 5 ele passa no $\frac{1}{2}$. É ehh... A ordenada é $\frac{1}{2}$.

Apenas ajudada pela investigadora, a Cristiana consegue identificar a derivada de uma função num determinado ponto com o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto, mostrando-se, a partir de então, expedita na determinação do valor pretendido (ver figura 5.19). Após determinar o valor da ordenada na origem, *b*, que identifica como desconhecido (embora demonstrando alguma hesitação na substituição das variáveis pelas coordenadas do único ponto da recta inicialmente conhecido), a Cristiana rapidamente obtém o valor da abcissa pretendida

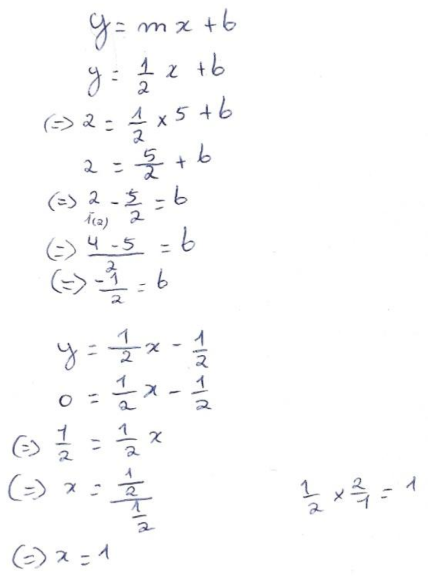


Fig. 5.19 – Resolução da questão 2 (2.ª Entrevista) apresentada pela Cristiana.

Rita

Por seu turno, a Rita apresenta uma evolução claramente positiva, manuseando os conceitos com uma certa naturalidade, porém ainda revelando algumas fragilidades. Perante as possibilidades de rectas tangentes a curvas num determinado ponto apresentadas na questão 1C, a resposta da Rita foi imediata e peremptória:

> Rita: Não, ... A f não tem tangente, tem duas. Então não tem. Só ahh [a pensar] ... Esta. [a indicar a recta s como tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa a].

No caso da questão 2, a Rita apresenta inicialmente um certo bloqueio de raciocínio, tendo apenas referido, de forma isolada, "o declive da recta". A investigadora ajuda-a a estabelecer a identificação entre o valor da derivada da função f no ponto de abcissa 5 e o declive da recta tangente ao gráfico da função nesse ponto:

> Entr.: Declive da recta... O que é que é o declive da recta? Porquê que te vem declive da recta à...
>
> Rita: Declive da recta é igual à derivada... Do ponto.
>
> Entr.: Da função naquele ponto.
>
> Rita: Sim.
>
> Entr.: E então o que é que tu já tens aí?
>
> Rita: Tenho a derivada no ponto 5.
>
> Entr.: E portanto, que conclusão tiras daí?
>
> Rita: Que o declive da recta é $\frac{1}{2}$.

A Rita escreve $m = \frac{1}{2}$, incentivada pela investigadora, e continua pela escrita da equação reduzida da recta, $y = mx + b$. No entanto, confunde a ordenada na origem, b, com a ordenada no ponto de intersecção com o eixo das abcissas: "o b eu sei que é zero, porque é a ordenada aqui [apontando ponto (a, 0)], o y". Apoiada pela investigadora, a Rita esclarece o equívoco, pois conhece o significado de b. Ao retornar à equação da recta, a Rita substitui y por zero, mas volta a ficar detida perante o desconhecimento de b. Só com o auxílio da investigadora, a Rita consegue reconhecer os procedimentos usais e resolver correctamente a questão:

> Entr.: Como é que normalmente, tendo assim a equação da recta, neste caso $y = \frac{1}{2}x + b$, como é que obtemos o b?
>
> Rita: Substituindo por um ponto da recta... Ah! [apercebendo-se]... Ai, [rindo muito] não acredito! Está aqui o ponto... [continuando a rir]. Ai meu Deus!

A aluna apresenta dificuldades em aceder aos objectos e procedimentos matemáticos subjacentes, apesar de os conhecer.

João

Relativamente ao João, o aluno parece manter algumas das dúvidas reveladas na primeira entrevista, sobretudo no que diz respeito ao conceito de recta tangente a uma curva num ponto, evidenciando igualmente algumas incorrecções nos termos matemáticos utilizados. Já em relação ao conceito de derivada de uma função num ponto e à respectiva interpretação geométrica, o João revela um grande à-vontade no seu manuseamento. Assim e perante os esquemas da questão 1C, numa primeira abordagem, começa por confirmar o facto das rectas representadas serem tangentes às respectivas curvas nos pontos indicados:

> João: Ehh... São, mas pod... Por exemplo aqui no... Neste aqui [referindo-se ao gráfico da função *f*] pode haver mais do que esta.
>
> Entr.: Uhm...?
>
> João: Por exemplo haver uma exactamente igual, mas com... Sentido inv... Ou direcção? Sentido, acho eu, inverso.

Não se encontrando muito convencido com a própria resposta, o João detém-se um pouco mais na observação das representações gráficas:

> João: Esta é [tangente], mas...
>
> Entr.: Na função *f*?
>
> João: Na função *f* acho que é. Lembro-me disto ser assim... Se isto estiver horizontal! [referindo-se à posição da recta tangente].
>
> (...)
>
> João: Mas aqui [referindo-se à recta *s* tangente ao gráfico de *g*], eu acho que isto aqui não pode ser tangente, 'stôra', porque toca em mais do que um ponto da função.

Perante a questão colocada pela investigadora quanto à forma de determinação da recta tangente a uma curva num ponto, o João afirma só se recordar da "primeira definição, que era quando ela [a recta tangente]... Numa curva tocava apenas num ponto", admitindo, no entanto, saber que esta forma de construção se encontrava ultrapassada. Apenas após a investigadora recordar o método de determinação de rectas tangentes a uma curva num ponto, é que o João decide inequivocamente que a recta s é tangente ao gráfico da função g no ponto a. Porém, continua a revelar uma acentuada influência do conceito clássico de tangente, ao persistir na ideia que o mesmo também acontece no caso da recta r e da função f e ao insistindo igualmente, para este caso, na existência de outras rectas tangentes.

Ao construir a tangente ao gráfico de f no ponto a, o João traça as rectas "secantes" como se elas fossem progressivamente se aproximando da recta r (figura 5.20), mas logo se apercebe que tal não pode ocorrer:

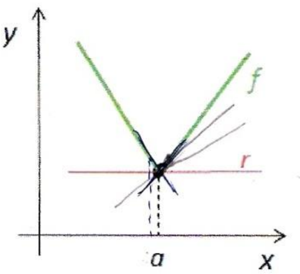


Fig. 5.20 – Construção efectuada pelo João para determinar a recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa a.

> João: Já estou mesmo a ver que não é. Por exemplo, 'stôra', nunca vai poder haver dois pontos aqui iguais [referindo-se a objectos com imagens iguais] para que seja horizontal. Vai ter... Vai estar, nem que seja minimamente um bocadinho mais acima, que vai logo fazer com que ela deixe de ser horizontal e passe a ser diagonal.

Só após os esclarecimentos da investigadora, é que o João se mostra completamente elucidado quanto ao correcto traçado das rectas secantes e das duas semi-tangentes ao gráfico da função no ponto a.

Já no caso da questão 2, o João apresenta muita facilidade na sua resolução. Entrega-se logo à escrita da equação reduzida da recta tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 5, utilizando, de forma muito natural, o facto de o seu declive ser igual ao valor da derivada da função nesse ponto. O João apenas se detém por alguns segundos perante a dificuldade de desconhecer o valor da ordenada na origem, mas logo se recordando do procedimento usual: "Ah, já sei, substituímos aqui por pontos que nós conhecemos, neste caso o (5, 2)".

5.3. Função derivada

As questões com as quais se pretendia avaliar os conhecimentos adquiridos pelos alunos no que diz respeito à função derivada, surgiram apenas na segunda entrevista (ver questões 3 e 4 no anexo 2) e no teste de avaliação (ver anexo 6), e envolviam o respectivo conhecimento tanto numa vertente analítica, pela determinação de funções derivadas de funções polinomiais e respectiva interpretação do seu significado em determinados pontos; como uma vertente gráfica, pelo relacionamento de funções afim e respectivas derivadas.

Cristiana

A Cristiana parece revelar uma maior noção dos conceitos e procedimentos envolvidos, embora evidencie grandes lacunas e inseguranças. Ao ser confrontada com a questão 3 da 2.ª entrevista, no qual era solicitado o cálculo da taxa de variação em dois determinados valores (5 e 11) de uma função *P*, a partir do conhecimento da sua expressão analítica *P(t)*, a Cristiana começa por evitar raciocinar, refugiando-se em questões de procedimentos: "Não é para pôr aqui o 5 no... [referindo-se ao cálculo de P(5)] Porque senão assim era muito fácil". No entanto e após a chamada a atenção para o que era realmente pedido (taxa de variação), a aluna refere-se à t.m.v., oscilando, por instantes, entre a ideia de determinar esta grandeza no intervalo de 5 a 11 e o facto de a taxa de variação não ser relativa a um intervalo, mas "mesmo só num ponto, só mesmo num".

Ajudada pela investigadora, que a incita a recordar o exercício anterior (exercício 2), a Cristiana identifica a equivalência do conceito de taxa de variação num ponto, primeiramente com o de declive da recta tangente nesse ponto, depois com o de velocidade e, por último, com o de derivada, embora este tenha apenas ocorrido *a posteriori* e de forma algo ténue. A Cristiana então logo se apercebe da forma de resolução do exercício, embora e mais uma vez, a traduza pelos respectivos procedimentos:

> Cristiana: Ah! Fazemos o 15 vezes 2... Eh... Depois *t*...
>
> Entr.: Ou seja, estás a dizer que determinas a derivada, a função derivada...
>
> Cristiana: ... Desta. [referindo-se à função *P*]
>
> Entr.: ... Desta função...
>
> Cristiana: ... E depois aí é que se substitui.

A Cristiana ainda duvida novamente do processo de resolução do exercício, por se recordar que "... Havia uma vez que tinha de se substituir era nesta [referindo-se à função P]", mas acaba por efectuar os cálculos, aplicando de forma expedita as regras de derivação de funções polinomiais e determinando com destreza os valores solicitados (figura 5.21).

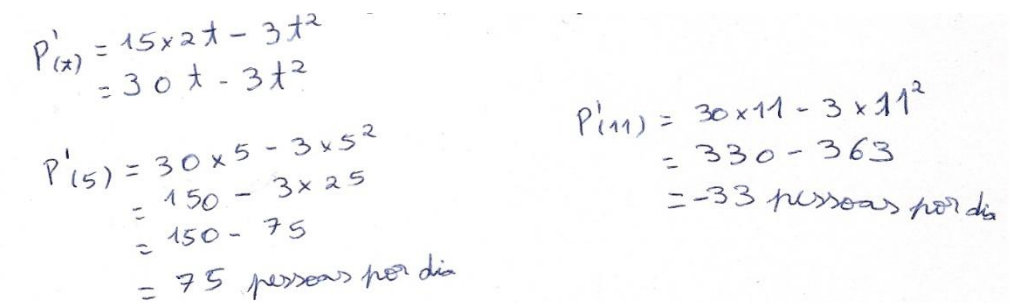


Fig. 5.21 – Cálculos efectuados pela Cristiana em resposta à questão 3 (2.ª Entrevista).

A Cristiana não se mostrou capaz de interpretar os valores obtidos no contexto do problema, tendo apenas conseguido identificar as respectivas unidades na sequência da intervenção da investigadora, no sentido de a fazer recordar do exercício 2 da Ficha de Trabalho N.º 32A e das respectivas unidades de velocidade. A aluna tende a interpretar os valores obtidos como uma variação média e não instantânea:

> Cristiana: Estas 75 pessoas por dia são as que são afectadas... Pela epidemia. Por dia são 75 pessoas; em cinco dias, por dia, cada dia vão ser 75 pessoas...

No que diz respeito ao cálculo de *P'(11)*, a Cristiana surpreende-se com o valor negativo obtido: "Ih! Com menos... Não há pessoas negativas!", voltando a não conseguir interpretar de forma correcta o seu significado, mesmo quando este já lhe havia sido anteriormente esclarecido pela discussão relativa ao outro valor determinado.

Quando confrontada, no teste de avaliação sumativa, com o exercício 2 (ver anexo 5), em tudo idêntico a este, a Cristiana não foi capaz de apresentar qualquer resposta.

Relativamente à questão 4 da 2.ª entrevista, na qual eram solicitadas propostas para os gráficos das funções derivadas de cada uma de três funções afim representadas (gráfico superior da figura 5.22), a Cristiana fica inicialmente assustada ("Isto é que é o pior!"), mas depois, atenta à função *f*, começa a relacionar a monotonia da função com o sinal da sua função derivada: "Quando ela [a função] era crescente, ela [a derivada] era positiva"; parecendo, no entanto, confundir a necessidade de a função derivada assumir sempre valores positivos com o facto de esta ser representada por uma recta de declive positivo, ao propor a curva *1* na figura 5.20 como representação gráfica da função *f*. No entanto a Cristiana abandona rapidamente essa opção por se aperceber que essa recta iria igualmente assumir valores negativos: "Não, mas aqui ela continua para baixo". Ainda sugere "trocar", apresentando uma recta de declive aparentemente inverso (curva *2* na figura 5.22), mas percebe igualmente que esta também não satisfaz a necessidade de ser sempre positiva.

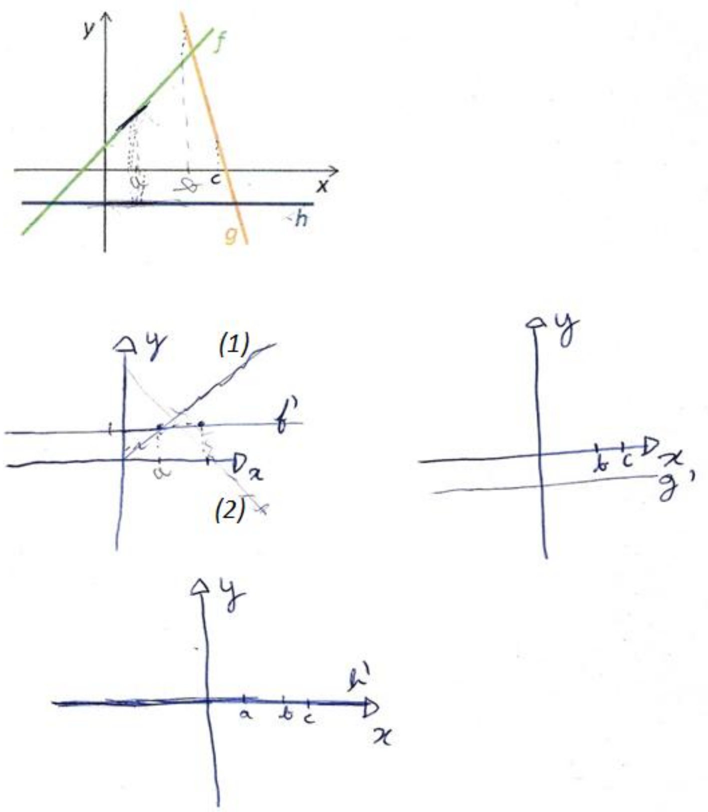


Fig. 5.22 – Reprodução da folha de resposta da Cristiana para a questão 4 (2.ª Entrevista).

Apenas através da ajuda prestada pela investigadora, que sugere a determinação da derivada num ponto de abcissa *a*, a aluna consegue perceber que a derivada nesse ponto possui o mesmo valor que o declive da recta pela qual é representada a função *f*:

> Entr.: Como é que obténs a derivada no ponto *a*?
>
> Cristiana: A derivada... É num... A derivada do ponto *a* ou da recta? Da recta...?
>
> Entr.: É a derivada da função *f*, que é representada por uma recta, no ponto de abcissa *a*.
>
> Cristiana: Ainda agora estive a fazer isto...
>
> Entr.: Exactamente. Derivada ou...?
>
> Cristiana: Ou declive.
>
> Entr.: Sim, declive...
>
> Cristiana: Declive ou taxa de velocidade instantânea...
>
> Entr.: Declive de quê?
>
> Cristiana: Da recta tangente.
>
> Entr.: Da recta tangente. Como é que é a recta tangente aí, da função nesse ponto?
>
> Cristiana: Vai ser o... Próprio gráfico.

A Cristiana identifica igualmente o valor da derivada num outro ponto de abcissa *b* (igualmente proposto pela investigadora) com o valor do declive da recta que representa *f*, que supõe igual a um, para simplificar, mas apresenta dificuldades em construir a representação gráfica de *f'*. Apenas após assinalar, segundo a orientação da investigadora, o valor da função derivada nos pontos de abcissa *a* e *b* (ver gráfico de *f'* na figura 5.22), a Cristiana identifica e representa o gráfico de *f'*:

Cristiana: Ah! É uma... Uma linha...

Entr.: Uma recta...

Cristiana: Uma recta... De... y=1.

Relativamente à função *g*, a Cristiana não apresenta quaisquer dificuldades em determinar a sua derivada, reproduzindo o procedimento efectuado no caso anterior, utilizando o ponto de abcissa *b* já indicado e um outro ponto de abcissa *c* por ela escolhido (ver gráfico superior na figura 5.22). A aluna representa a função *g'* de forma expedita, embora não se revele capaz de reproduzir a diferença verificada nos valores absolutos dos declives das rectas que representam, respectivamente, as funções *f* e *g*.

Já no caso da função *h*, a Cristiana parece revelar alguma confusão entre a existência de função derivada e o facto do declive da recta que a representa ser nulo: "A *h* [função *h*]... Ela é constante. A *h* não tem... Derivada...". A aluna revelou igualmente dificuldades em efectuar, neste caso, um procedimento similar ao efectuado no caso das outras duas funções, apenas o fazendo pelo incentivo da investigadora. Após esse procedimento, a Cristiana consegue identificar e representar a função derivada da função *h*:

Cristiana: Pode-se dizer que é o próprio referencial.

Entr.: O eixo...

Cristiana: O eixo Ox.

A Cristiana respondeu acertadamente ao exercício 1 do teste de avaliação sumativa (anexo 5) que implicava um raciocínio semelhante a este, mas de sentido inverso: era apresentado o gráfico de uma função *g'* constante e pretendia-se a identificação da função *g*.

Rita

A Rita apresenta muitas dificuldades na resolução das questões colocadas, sobretudo resolução da questão 3 (anexo 2). Desde o início, revela alguma confusão, não só, entre os diferentes significados dos valores da função e da sua derivada num determinado ponto, como também entre os conceitos de t.m.v. e de taxa de variação instantânea:

Rita: Quer dizer, podemos pôr na ... Num gráfico e ver... Se ele está a crescer ou não, ou a diminuir. A taxa. Consoante o dia.

Entr.: Uhm.

Rita: Mas também posso fazer o P(5) e o P(11) e vejo qual é que é o resultado maior. E depois vejo se ao fim de 11 dias existem mais ou menos pessoas infectadas de que ao fim de 5. É isso...?

Entr.: E é isso que nos então a perguntar? Qual o número de pessoas infectadas ao fim de 5 dias e ao fim de 11 dias?

Rita: Não, é taxa de variação.

Entr.: É a taxa de variação.

Rita: No intervalo? Pode ser?... É no intervalo de 5 a 11? Ou é naquele ponto específico?

Quando, ajudada pela investigadora, fica esclarecida relativamente aos conceitos de t.m.v e de taxa de variação instantânea e questiona, desabafando:

Rita: E é aquela coisa que... Como se fosse, tipo, a velocidade?

Entr.: É.

Rita: Instantânea?

Entr.: É. Exactamente.

Rita: Eu não gosto muito dessa parte.

A Rita representa, com auxílio da calculadora, a função em análise (ver figura 5.23), mas mantém o seu nível de confusão entre os vários conceitos envolvidos. A pedido da investigadora, a Rita representa sobre o gráfico da função a recta secante correspondente à t.m.v. no intervalo de 5 a 11 e fala em "média de pessoas" de um extremo a outro do intervalo, mas só identifica claramente o conceito de taxa de variação com o de derivada num determinado ponto quando lhe são referidas as expressões "velocidade" e "a tender para um instante".

Embora identificando a necessidade de determinação do valor da derivada nos pontos solicitados, a Rita revela muitas dificuldades na sua concretização; primeiro sugere a representação (sem qualquer possibilidade de rigor) das rectas tangentes aos pontos e a determinação do correspondente declive, seguidamente torna a sugerir a determinação do valor da função nos pontos e ainda, após alguma reflexão, sugere com alguma hesitação: "Podíamos fazer aquela coisinha dos pontos... Mais próximos. Não era isso...?".

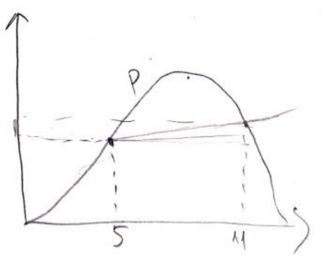


Fig. 5.23 – Esboço realizado pela Rita na resolução da questão 3 (2.ª Entrevista).

Só depois de muito ajudada pela investigadora é que a Rita decide determinar a função derivada da função dada (ainda apresentando algumas dúvidas no conhecimentos das respectivas regras) e utilizá-la para determinar os valores pedidos.

A Rita mantém as dificuldades no que diz respeito à interpretação dos resultados obtidos. Apresenta muitas dificuldades na identificação das respectivas unidades, não se recordando inclusivamente de exemplos realizados nas aulas. Relativamente ao respectivo significado no contexto do problema, a Rita volta a confundir os conceitos de função e de derivada:

> Rita: [Significa] Que passados 5 dias, existem 75 pessoas, assim uma coisa...
>
> Entr.: Existem 75 pessoas a quê?
>
> Rita: Afectadas.

O mesmo equívoco é evidenciado pela Rita no caso do valor negativo da derivada, obtido para $t = 11$, mesmo após o esclarecimento efectuado pela investigadora acerca do significado do valor anterior ($t = 5$):

> Rita: Já não há pessoas. Quer dizer... -35 não... É um bocado... Ah... É um número negativo. Já não há. Pessoas afectadas.

As dificuldades apresentadas na entrevista pela Rita foram igualmente evidenciadas na sua resposta à questão semelhante colocada no teste de avaliação sumativa (anexo 5), conforme pode ser verificado pela interpretação da figura 5.24.

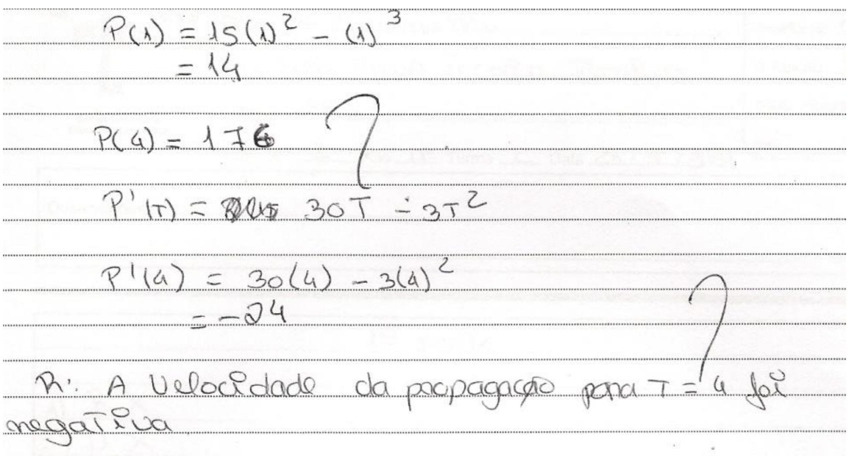

$P(1) = 15(1)^2 - (1)^3$
$= 14$
$P(4) = 176$?
$P'(T) = 30T - 3T^2$
$P'(4) = 30(4) - 3(4)^2$
$= -24$?
R: A velocidade da propagação para $T = 4$ foi negativa

Fig. 5.24 – Reprodução da resposta dado pela Rita à questão 2 do teste de avaliação sumativa (anexo 5)

Relativamente à questão 4 e ao tentar analisar a função *f*, a Rita relaciona correctamente a sua monotonia com o sinal da respectiva função derivada, mas possui apenas uma intuição de que esta "vai ser uma recta", não se mostrando convencida com a sua própria justificação, que acompanha com risos: "porque esta [a função *f*] também é uma recta...".

Quando questionada sobre a forma de obtenção da derivada de uma função num ponto, a Rita identifica que a derivada é igual "ao declive da recta tangente", não sendo, no entanto, capaz de a representar de forma correcta (ver na figura 5.25 a recta concorrente à recta que representa a função *f*, traçada pela Rita).

Perante a desaprovação da investigadora, a Rita acaba por emendar a sua resposta: "Não! Vai ser a própria [função]"; identificando igualmente a coincidência da recta tangente em qualquer ponto da função com a própria recta que a representa e concluindo que a função derivada "vai ser sempre constante".

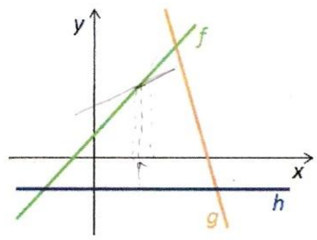


Fig. 5.25 – Representação da recta tangente ao gráfico da função *f* no ponto de abcissa *a* feita pela Rita (Questão 4, 2.ª Entrevista).

A Rita representa de forma correcta quer a função derivada de *f*, quer a de *g*, que traduz por: "É ao contrário, mas na parte negativa".

Perante a questão colocada pela investigadora sobre a possibilidade de a função *g'* assumir o valor -1, supondo que a função *f'* assume o valor 1, a Rita reconhece que isso não pode ocorrer, embora não o expressando de forma clara:

Rita: Porque... Porque... Porque o declive da recta tangente a um ponto, ...

Entr.: Uhm.

Rita: Ia ser a própria recta e a recta não tem declive -1 [referindo-se à representação da função *g*].

Entr.: E...

Rita: Para ser, tinha de ser mais horizontal.

Relativamente à função *h*, a Rita começa por afirmar que ela não tem derivada, mas corrige-se de seguida: "Tem, também é a própria [referindo-se à função]". No entanto, só com a intervenção da investigadora que a induz a determinar a derivada em alguns dos pontos da função, é que a Rita dissipa as suas dúvidas levantadas pelo facto da própria função já assumir valores constantes, acabando por identificar e representar correctamente a função *h'* coincidente com "o eixo dos xx".

Tal como a Cristiana, a Rita também respondeu acertadamente ao exercício do teste de avaliação muito semelhante a este.

João

Relativamente ao João, ele revela sobretudo alguma dificuldade em lidar com diferentes representações do conceito de derivada, mantendo-se sob uma forte influência da forma como este conceito foi apresentado nas aulas. Uma vez esclarecido, o João revela alguma destreza tanto na aplicação, como na interpretação do conceito. Assim e na questão 3, começa por representar uns eixos coordenados com o objectivo de representar a função, com recurso à calculadora, e “depois fazer aquela coisa dos intervalos cada vez mais pequeninos”. Só com o auxílio da investigadora, o João identifica, embora de forma algo insegura, o procedimento que pretendia realizar com a determinação da derivada da função nos pontos pretendidos:

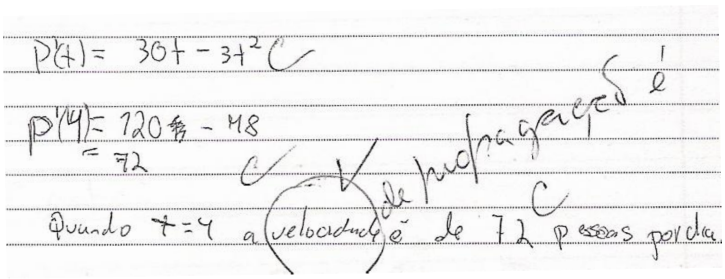
> Entr.: Com os ‘intervalos mais pequeninos’ o que é que estás a pensar fazer?
>
> João: Descobrir o valor em que ele se está a aproximar cada vez mais.
>
> Entr.: Sim... Ou seja estás a calcular o quê?
>
> João: Uhm... Ah, o decl... Uhm...
>
> [pausa prolongada]
>
> Entr.: Isso que tu ias dizer, sim.
>
> João: O decliv... A tangente... Não...
>
> Entr.: Ok, o declive da recta tangente ao gráfico nesse p...
>
> João: Ou seja, a derivada!
>
> Entr.: Ou seja, a derivada.
>
> João: Ah, já percebi!

Seguidamente, o João entrega-se ao cálculo da função derivada da função dada (embora não se recorde muito bem das respectivas regras de derivação) e ao cálculo dos valores dessa função nos pontos solicitados.

No que concerne à interpretação dos valores obtidos, o João apresenta alguma dificuldade em identificar as respectivas unidades, inicialmente indicando que estas seriam *Pessoas*. No entanto, reflectindo que se trata de uma “taxa de variação” e recordando, com a ajuda da investigadora, o exercício 2 da Ficha de Trabalho 32A (anexo 3), o João propõe a grandeza correcta: *Pessoas/dia*. Quanto à interpretação dos valores no contexto do problema, o João parece apresentar a ideia de uma variação instantânea:

> João: Neste dia [referindo-se a $t = 11$] ... O número de pessoas infectadas decresceu e neste aqui [t=5] cresceu.

O João respondeu correctamente ao exercício 2 do teste de avaliação sumativa (ver anexo 5), conforme se pode verificar na figura 5.26.


$P'(t) = 30t - 3t^2$ C

$P'(4) = 120 - 48$

$= 72$ C

Quando $t=4$ a velocidade de propagação é de 72 pessoas por dia C

Fig. 5.26 – Reprodução da resposta dado pelo João à questão 2 do teste de avaliação sumativa .

Relativamente ao exercício 4 e à identificação geométrica de funções derivadas de funções afim, o João revela um grande à-vontade na manipulação dos objectos matemáticos envolvidos, embora ainda apresente uma ligeira confusão entre o sinal dos valores assumidos por uma função afim e o sinal do respectivo declive. Assim e perante os gráficos apresentados neste exercício, o João decide-se rapidamente por analisar em primeiro lugar a derivada da função *h* pois, na sua opinião, "A da *h* é mais fácil". Com destreza, raciocina que a respectiva função derivada "vai ser isto, o próprio eixo dos xx, não?", justificando-o com:

> João: Porque... Eh... Todas as rectas que vão... As tangentes que poderíamos fazer pelos pontos vão sempre ter de declive... Vai ser um declive nulo.

Ao analisar a derivada da função *g*, percebe que ela "vai ser sempre negativa" e propõe uma recta de declive negativo (curva *1* na figura 5.23), mas logo se apercebe do erro:

> João: Ah, não...Assim [desenhando o gráfico de *g'* conforme figura 5.27]. Porque o declive vai ser sempre o mesmo, vai é ser sempre também é negativo.

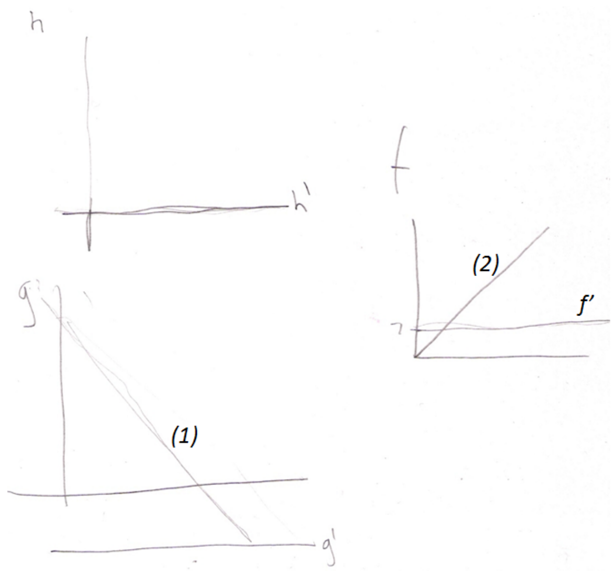


Fig. 5.27 – Reprodução da folha de resposta do João para a questão 4 (2.ª Entrevista).

O João volta a equivocar-se na determinação da função derivada de *f* (curva *2*), tornando igualmente a corrigir prontamente a situação. O aluno identificou a diferença verificada nos valores absolutos dos declives das duas rectas que representam, respectivamente, as funções *f* e *g*, reproduzindo-a nos respectivos esboços construídos.

Também o João respondeu acertadamente ao exercício 1 do teste de avaliação sumativa (anexo 5).

Capítulo 6

Conclusões

Este estudo, integrado na formação profissional de uma futura docente de Matemática, teve como principal objectivo a análise da eficácia das estratégias de ensino por si implementadas na leccionação do conceito derivada, incidindo não só sobre a verificação da apreensão pelos alunos dos conceitos envolvidos, mas e sobretudo, numa análise reflexiva relativamente à forma como esses conceitos foram apreendidos e aos factores que intervêm nessa apreensão quer de forma positiva, quer negativa.

Foi seleccionada uma amostra de três alunos para participar no estudo, que se pretendeu representativa da turma, de modo a permitir uma observação mais cuidadosa e detalhada. A selecção dos alunos foi realizada segundo a categorização efectuada por Domingos (2003), relativamente aos níveis de complexidade dos conceitos imagem manifestados: conceito imagem incipiente, conceito imagem instrumental e conceito imagem relacional.

Este capítulo foi elaborado com base nos dados recolhidos, na observação das aulas leccionadas, nas entrevistas efectuadas e ainda na análise de documentos. As duas entrevistas efectuadas ocorreram em dois momentos distintos. A primeira teve lugar no próprio dia em que foram abordados os primeiros conceitos relacionados com o tema, nomeadamente o conceito de t.m.v., de recta tangente a uma curva num ponto e de derivada de uma função num ponto. Possuiu um carácter mais estruturado, foi aplicada simultaneamente aos alunos participantes no estudo e o seu principal objectivo consistia na averiguação da compreensão e assimilação dos objectos matemáticos envolvidos no conceito de derivada, logo após o seu primeiro contacto com eles. Por seu lado, a segunda entrevista foi realizada individualmente a cada um dos alunos, duas semanas após a leccionação dos conteúdos programáticos e após a realização de um momento de avaliação sumativa. Possuiu um carácter semi-estruturado e com ela pretendia-se analisar as aprendizagens desenvolvidas e detidas pelos alunos, uma vez concluída a leccionação dos respectivos conteúdos e eventualmente efectuados os correspondentes esforços de consolidação dos conhecimentos.

Neste capítulo encontram-se as conclusões sobre a apreensão dos conceitos pelos alunos e sobre os seus níveis de complexidade dos conceitos imagem. Com elas pretende-se, respectivamente, aferir as aprendizagens efectivas manifestadas pelos alunos após a leccionação dos conceitos segundo um determinado modelo de intervenção didáctica e analisar a validade da identificação inicialmente efectuada entre cada um dos alunos participantes no estudo e os respectivos níveis de complexidade dos conceitos imagem. O capítulo é concluído por uma reflexão crítica, fundamental num contexto de formação de docentes de matemática, em que esta investigação se encontra inserida.

6.1. Apreensão dos conceitos pelos alunos

Na generalidade, os três alunos participantes neste estudo pareceram revelar uma razoável presença dos conceitos matemáticos explorados, porém muitas vezes manifestando grandes lacunas, quer ao nível da autonomia, quer ao nível do rigor na linguagem e na construção matemática ou ainda ao nível da consistência dos próprios conceitos.

A realização de entrevistas em dois momentos distintos, um no próprio dia de iniciação ao conceito de derivada e outro após a sua conclusão e realização do respectivo teste de avaliação de conhecimentos, permitiu, de algum modo, inferir sobre a forma como os alunos evoluíram na aquisição dos conhecimentos, possibilitando a identificação de possíveis causas para algumas lacunas e dificuldades verificadas.

No caso do conceito de t.m.v., ele havia sido introduzido aos alunos através da exploração de um exercício envolvendo um contexto real, pela manipulação simultânea da sua definição e pela sua interpretação geométrica. Paralelamente foi igualmente explorada a relação entre a monotonia de uma função num intervalo e o respectivo valor de t.m.v., consolidada pela concretização de vários exemplos, sempre através de uma dupla abordagem numérico-geométrica. Na aula, os alunos pareceram acompanhar a evolução do conceito, participando activa e espontaneamente na sua exploração e não revelando quaisquer dúvidas na respectiva compreensão. No mesmo sentido, as respostas apresentadas pelos alunos às questões colocadas na primeira entrevista, realizada nesse mesmo dia, denotaram um certo à-vontade na manipulação do conceito. Assim e nos casos da Cristiana e da Rita, apesar da verificação de algumas dificuldades, quer ao nível da tradução entre representações, quer ao nível da tradução e da apresentação de prova matemática, as alunas pareceram denotar uma certa compreensão dos conceitos envolvidos, tendo abordado as questões com relativo desembaraço e familiaridade. Já no caso do João, o aluno revelou ter apreendido os conceitos trabalhados, manipulando com destreza diferentes representações e relacionando de forma igualmente ágil diferentes objectos matemáticos, como no caso da exploração da relação entre t.m.v. e a monotonia da função. De salientar, no entanto, a verificação para este aluno de evidentes incorrecções na notação matemática e de alguma falta de consistência e rigor nas justificações apresentadas.

Já na segunda entrevista os desempenhos dos alunos não foram tão lineares, verificando-se, à excepção da Rita, um maior esquecimento e confusão relativamente aos conceitos trabalhados. A Cristiana foi quem maior confusão e insegurança apresentou. Apesar de parecer possuir alguma noção dos objectos matemáticos, a aluna não foi capaz de os traduzir e de os manusear de forma clara, confundindo por exemplo, o valor da função num ponto com o valor da respectiva taxa de variação nesse ponto, a recta secante ao gráfico de uma função com a própria representação gráfica dessa função ou ainda o sinal da t.m.v. num determinado intervalo com o sinal dos valores da função nesse intervalo. A Cristiana, que não revelou uma aprendizagem satisfatória dos conceitos, evidenciou igualmente dificuldades em relacionar diferentes representações, refugiando-se sobretudo em procedimentos algébricos.

Por seu turno, o João parece ter revelado sobretudo algum esquecimento relativamente aos objectos trabalhados. Assim, não foi, por exemplo, inicialmente capaz de distinguir t.m.v de taxa de variação, nem de relacionar estes conceitos com a sua interpretação gráfica ou ainda, tal como a Cristiana, de notar a diferença entre o valor da função num ponto e o valor da taxa de variação nesse ponto. No entanto, e ao contrário da colega, uma vez recordados os conceitos, o João apresenta uma grande destreza no seu manuseamento e inter-relação.

A Rita revelou uma boa apreensão dos conceitos e um grande à-vontade no seu manuseamento, tendo respondido correctamente às questões colocadas. De assinalar, no entanto, para esta aluna, a existência de algumas dificuldades na formalização dos seus raciocínios e na produção de provas matemáticas.

Em conclusão, o conceito de t.m.v. parece ter sido bem apreendido na aula em que foi abordado. No entanto e sobretudo para dois dos alunos (Cristiana e João), o conceito acabou por revelar um certo desgaste ao longo do tempo. A falta de estudo, a passagem do tempo ou ainda a introdução posterior de outros conceitos frequentemente mais utilizados, são três dos factores que poderão estar, individual ou colectivamente, na origem deste "esquecimento" verificado para o conceito de t.m.v.

No que diz respeito ao conceito de derivada de uma função num ponto, a sua leccionação teve por base a utilização de situações do quotidiano dos alunos, envolvendo variáveis com significado concreto e explorando a ideia intuitiva de limite. Com efeito, a motivação para este conceito surgiu através do cálculo de uma velocidade instantânea, pela aproximação dos correspondentes valores da t.m.v. (determinação sucessiva da razão incremental), tendo sido realizado um exercício extra para assimilação do conceito. O significado geométrico de derivada foi explorado conjuntamente com os alunos, tendo este sido identificado com o conceito de tangente a uma curva num ponto. Por último, foram efectuados alguns esclarecimentos relativamente ao método de determinação de tangente, incluindo também uma perspectiva histórica. A existência de um tempo superveniente foi ainda aproveitada para a exploração das conexões entre os significados analítico e geométrico do conceito de derivada, através da utilização de um recurso computacional e de um programa construído e manipulado pelos próprios alunos.

Na aula, os alunos acompanharam com relativa clareza o processo de determinação de derivada de uma função num ponto, o mesmo já não acontecendo com o conceito de tangente, uma vez que este foi trabalhado já no seu término (tendo até se prolongado para além deste), com os alunos a já manifestarem sinais de cansaço, pela exploração de todos os novos conceitos. Foi possível identificar este facto na primeira entrevista, que incidia sobretudo no método de determinação de rectas tangentes a curvas e na interpretação geométrica de derivada num ponto. Assim, nenhum dos três alunos foi capaz de utilizar o método de determinação de tangentes pela posição limite das rectas secantes, tendo todos recorrido à sua ideia clássica, mesmo após o correspondente esclarecimento pela investigadora. A ideia da não intersecção da recta tangente com a curva, noutro ponto para além do ponto de tangência, foi a que pareceu causar maiores dificuldades aos alunos, tendo todos se decidido pela não existência de recta tangente no caso de uma função afim, devido à coincidência desta com a recta que representa a função.

Os alunos apresentaram igualmente dificuldades em identificar o termo "derivada" com o declive da recta tangente. Muito provavelmente, esta dificuldade ficou a dever-se ao facto deste termo não ter sido frequentemente referido na aula, apenas o sendo aquando da apresentação da respectiva definição e também no desenvolvimento da actividade no tempo superveniente. Apenas o João, embora com alguma insegurança, conseguiu estabelecer essa relação. A mesma dificuldade ocorreu no caso da identificação da notação $f'(a)$ para representação de derivada no ponto a, tendo esta notação apenas sido referida uma vez, na apresentação da respectiva definição. Apesar de se encontrarem esclarecidos quanto à correspondência entre a derivada de uma função num ponto e o declive da recta tangente nesse ponto, os alunos não foram capazes de a utilizar na resolução de uma situação concreta. Todos, mas sobretudo o João, pareciam demasiado condicionados pelo processo de motivação para o conceito de derivada utilizado na aula, que incidiu na determinação de vários valores da razão incremental. Apenas a Rita foi capaz de recorrer, após alguma orientação da investigadora, à interpretação geométrica do conceito de derivada para a resolução do exercício proposto, tendo então os outros alunos aceite e reproduzido o seu raciocínio. De referir ainda a dificuldade evidenciada por todos os alunos na interpretação do conceito de derivada.

Na segunda entrevista os alunos parecem revelar um maior à-vontade com os objectos matemáticos em questão, decorridas que foram três semanas de respectivo manuseamento e aplicação.

No caso por exemplo da identificação de tangentes a curvas, os três alunos manifestaram uma evolução claramente positiva. A Rita revelou dominar o conceito de tangente, enquanto a Cristiana e o João, embora inicialmente influenciados pelo conceito clássico, acabaram por se recordar do seu correcto método de determinação (o João com maior dificuldade). De notar que, no caso da determinação da tangente a um ponto pertencente a uma recta, tanto a Cristiana como o João revelaram a coexistência dos dois conceitos de tangente: o actual, ao sentirem uma certa necessidade da existência de um movimento de aproximação das rectas secantes na construção da tangente, mesmo quando isso não se verificava; e o clássico, ao apresentarem algumas dificuldades em aceitar a coincidência entre a recta tangente e a recta que representava a função.

Os alunos também revelaram um progresso significativo, no que se refere à aplicação do conceito geométrico de derivada, quando colocados perante uma situação muito semelhante à da primeira entrevista. O João foi o aluno que maior destreza demonstrou, ao identificar naturalmente a derivada da função num ponto com o declive da recta tangente ao gráfico nesse ponto e ao efectuar de forma expedita os cálculos necessários. Quer a Cristiana, quer a Rita acabaram também por identificar o significado geométrico de derivada (embora com maiores dificuldades por parte da Cristiana) e por efectuar os procedimentos algébricos necessários (neste caso com maiores fragilidades apresentadas pela Rita).

Pelo exposto e relativamente aos dois conceitos explorados na primeira aula, os conceitos de t.m.v. e de derivada de uma função num ponto, podemos referir que logo após a aula, o primeiro encontrava-se melhor apreendido, verificando-se uma inversão da situação cerca de três semanas depois. O facto de o conceito de t.m.v. ter sido trabalhado no início dessa aula, com maior recurso à exploração de exemplos e ligações a outros objectos matemáticos, ao contrário do que aconteceu com o conceito de derivada, concluído já para além do regular horário lectivo, parece muito contribuir para este facto. Por outro lado, o conceito de derivada foi leccionado segundo um percurso do mais global e intuitivo para o formal e abstracto, através da exploração de uma situação da vida real. O objectivo era promover compreensões significativas e consistentes dos objectos matemáticos subjacentes. No entanto, desta forma, a definição do conceito de derivada parece ter ficado prejudicada, não só com os alunos na primeira entrevista a apresentarem inicialmente alguma dificuldade em identificar o significado do próprio termo ("derivada"), como também a evidenciarem muitas dificuldades na interpretação da respectiva definição. Todavia, estas dificuldades apresentadas parecem ter sido em grande parte suplantadas, muito provavelmente pelo seu continuado manuseamento e consequente clarificação e interiorização. Em sentido contrário, o conceito de t.m.v., apenas abordado com maior ênfase na primeira aula, parece sofrer de algum desgaste e esquecimento ao longo do tempo. É no sentido de correcção deste problema que Orton (1983) sugere o estudo do conceito de t.m.v. como um tema em si e não apenas como um tema introdutório do conceito de derivada.

Para concluir, resta observar as apreensões realizadas pelos alunos relativamente ao conceito de função derivada. Este conceito foi leccionado ao longo de três aulas, nas quais foram exploradas as funções derivadas da função afim, das funções quadrática e cúbica, da função racional $\frac{1}{x}$, da função módulo, da função soma de duas funções e ainda da função derivada do produto de uma constante por uma função, sobretudo com ênfase na construção do conhecimento pelos próprios alunos. Assim, e através da determinação geométrica da derivada de algumas funções em vários dos seus pontos, os alunos foram convidados a construir as respectivas funções derivadas. Foi igualmente dado grande ênfase à definição formal de função derivada, assim como à demonstração analítica das expressões das várias funções derivadas em estudo e ainda às respectivas representações gráficas. Mais uma vez, pretendeu-se potenciar a capitalização dos conhecimentos prévios dos alunos, apoiando-se nestes para a construção de conceitos formais. Nas aulas, os alunos revelaram algumas dificuldades relacionadas com o nível de abstracção inerente aos conceitos envolvidos, sobretudo no que concerne às conexões entre as suas várias representações. De salientar, também, a dificuldade verificada na utilização da definição para determinação de expressões analíticas de funções derivadas. Estas dificuldades foram sendo, no entanto, gradualmente atenuadas à medida que exemplos e procedimentos concretos foram sendo explorados.

Na segunda entrevista, os três alunos participantes no estudo apresentaram muitas dificuldades na resolução de uma questão que apelava à utilização analítica do conceito de função derivada num contexto real. Era dada uma função polinomial e eram pedidas as taxas de variação em dois pontos. Nenhum dos alunos foi capaz de resolver a questão de forma independente. A Cristiana e a Rita revelaram muita insegurança nos seus conhecimentos, ambas com dificuldades em distinguir não só os conceitos de taxa de variação e de t.m.v, como também os de função e de função derivada. Por seu lado, o João identificou inicialmente o conceito de taxa de variação com os procedimentos explorados na primeira aula, propondo sua determinação através da representação da função e da correspondente construção geométrica a partir das rectas secantes. Uma vez reconhecida a necessidade do cálculo da derivada nos pontos solicitados, tanto a Cristiana como o João executam prontamente os cálculos necessários (embora o João denotasse algumas dúvidas relativas às regras de derivação), enquanto a Rita, também parecendo muito influenciada pelos procedimentos realizados na primeira aula, ainda propõe para a determinação das derivadas, tanto a representação geométrica das respectivas tangentes, como a aproximação pelo cálculo de várias razões incrementais.

Nenhum dos três alunos foi igualmente capaz de interpretar os valores obtidos, sem o auxílio da investigadora. Aliás, no caso da Rita, nem este auxílio foi suficiente para resolver as dúvidas de interpretação. Os alunos tenderam a interpretar os valores como uma variação média e não instantânea (Cristiana) ou ainda como se fossem valores da função e não da função derivada (Cristiana e Rita). Apenas o João apresentou uma interpretação correcta dos valores. De salientar a importância do exercício 2 da Ficha de Trabalho Nº 32 A, que havia sido realizado nas aulas, envolvendo um cenário do quotidiano dos alunos, e que serviu de referência, após a sua evocação pela investigadora, na “redescoberta” (à excepção da Rita) das unidades da função derivada.

As dificuldades apresentadas pelos alunos nesta entrevista, foram confirmadas pelas suas respostas no teste de avaliação, em que apenas o João apresentou uma resposta correcta a uma questão semelhante à aqui colocada.

Relativamente ao manuseamento do conceito de função derivada num contexto geométrico, os alunos revelaram, no geral, um desempenho positivo. De destacar sobretudo a prestação exemplar do João, que relaciona com grande desenvoltura os diferentes objectos matemáticos subjacentes, sendo apenas de assinalar um ligeiro equívoco, prontamente corrigido pelo aluno, entre o facto de uma função assumir sempre valores negativos e ser representada por uma recta de declive negativo. A Cristiana foi a aluna que maiores dificuldades revelou, também apresentando o mesmo equívoco que o João e também o identificando, porém apenas conseguindo relacionar correctamente os conceitos envolvidos, através da ajuda da investigadora. A Rita, embora tendo sido a única a apresentar dificuldades na determinação da tangente, acaba por revelar um bom nível de apreensão dos conceitos. De salientar, no entanto, que tanto a Rita como a Cristina ainda apresentaram dificuldades em reconhecer a existência de função derivada no caso de uma função constante, pelo facto das rectas tangentes possuírem declive nulo.

Os três alunos identificaram de forma correcta uma função afim com a sua função derivada, num exercício de escolha múltipla presente no teste de avaliação.

Relativamente à apreensão do conceito de função derivada é importante salientar alguns aspectos. Primeiramente, a dificuldade de alguns alunos em lidar com objectos e representações, nomeadamente e tal como também havia sido identificado por Orton (1983), com a distinção dos conceitos de taxa de variação média e instantânea e dos conceitos de valor de função e de função derivada num ponto. De salientar, por outro lado, a observação de um bom domínio dos algoritmos para o cálculo de derivadas, igualmente verificado por aquele investigador.

Em segundo lugar, é importante observar a verificação de uma grande influência da forma como o tema das derivadas foi primeiramente introduzido aos alunos, através da noção intuitiva de limite, com a exploração de exemplos concretos e a determinação da derivada, quer analiticamente através do limite de razões incrementais, quer geometricamente através do limite dos declives de rectas secantes. Pretendia-se promover uma construção sólida e fundamentada do conceito de derivada, mas ao invés disso, parece ter-se contribuído para um certo acentuar do processo, em detrimento do próprio conceito. Por outro lado, esta exploração detalhada do conceito, integrando uma consistente vertente geométrica, pode constituir um dos factores na origem de uma certa familiaridade verificada pelos alunos na exploração de questões gráficas.

Por último é de reafirmar a importância da exploração de situações reais, nomeadamente situações que traduzam movimento em função do tempo (NCTM, 2000; Selden e Selden, 1992; Janvier, 1978). Com efeito, os alunos demonstraram recordar-se prontamente dos conteúdos presentes na situação real explorada na aula, utilizando-os na construção do seu conhecimento.

6.2. Níveis de complexidade dos conceitos imagem dos alunos

Foi escolhida uma amostra de três alunos para participar neste trabalho, de acordo com os níveis de complexidade dos conceitos imagem inicialmente identificados com cada um deles. Assim, cada aluno participante foi conectado com cada um dos níveis conceitos imagem, segundo a classificação estabelecida por Domingos (2003), conforme se encontra explicitado na secção 3.2. (conceito imagem incipiente: Cristiana; conceito imagem instrumental: Rita; conceito imagem relacional: João). Nesta secção pretende-se aferir da validade desta identificação inicialmente estabelecida, com base nos dados recolhidos.

De uma maneira geral, pode afirmar-se que os níveis de complexidade dos conceitos imagem manifestados pelos alunos neste estudo, foram de encontro à identificação inicialmente estabelecida. Com efeito, tanto a Cristiana como a Rita manifestaram, respectivamente, níveis de complexidade incipiente e instrumental, com a Rita a evidenciar igualmente alguns conceitos imagem conectados com os outros dois níveis, sobretudo com o incipiente. O João, por seu lado, foi o aluno que menos concordância evidenciou com a sua identificação inicial. Com efeito, apesar de manifestar um desempenho pautado por alguns conceitos imagem de nível relacional, este aluno revelou em vários momentos apenas conceitos imagem de nível instrumental e até mesmo incipiente. Estes momentos parecem resultar sobretudo de uma certa falta de estudo e consequente esquecimento dos conceitos trabalhados, sendo que frequentemente, e uma vez estes recordados, o João transita com alguma facilidade para um nível relacional. Seguidamente são evidenciadas algumas das características manifestadas por cada um dos três alunos.

Cristiana

A Cristiana manifestou maioritariamente um conceito imagem incipiente em todos os momentos da investigação. Com efeito, a aluna revelou conceitos imagem muito incompletos e por vezes difusos, apresentando, por exemplo, dificuldades em distinguir os conceitos de taxa de variação, de t.m.v e de valor de uma função num ponto; ou apresentar autonomamente o conceito de tangente (respectivamente nas questões 1A e 3 e na questão 1C, todas da segunda entrevista). A Cristiana fez frequentemente referência a variados objectos elementares, no entanto revelando muita dificuldade em estabelecer relações entre eles e em os utilizar na tradução do conceito em estudo. Foi o que ocorreu por exemplo, quando tentava esclarecer os conceitos de t.m.v. e de derivada de uma função num ponto (respectivamente nas questões 1A e 2 da segunda entrevista), em que se referiu a objectos como recta e declive, sem no entanto os conseguir esclarecer e relacionar de forma conveniente, considerando ainda outros objectos que, embora pertencendo ao universo em estudo, não se relacionavam directamente com a abordagem pretendida.

A Cristiana mantém a sua identificação com o conceito imagem incipiente, igualmente no que se refere à verbalização de propriedades e à tradução entre representações. Com efeito, a aluna identifica algumas propriedades elementares de alguns objectos, como por exemplo a correspondência entre derivada e declive da recta tangente (questão 4 da segunda entrevista) ou ainda fazendo referência à ideia de limite envolvida na determinação de tangente (questão 1C da segunda entrevista), mas estas parecem apenas assentar na respectiva memorização e reprodução algo inconsequente, uma vez que a Cristiana revela muitas dificuldades em as aplicar nos momentos necessários. De referir que, na primeira entrevista, a aluna parece denotar um conceito imagem instrumental ao relacionar correctamente, e com compreensão, os conceitos de t.m.v. e de monotonia (questão 2), no entanto evidencia claras lacunas na utilização e manuseamento de traduções simbólicas dos respectivos conceitos, ao apresentar dificuldades na produção de provas formais.

Uma das características mais acentuadamente manifestadas pela Cristiana consiste na utilização parcial de proceitos, apenas assentes na componente processual e não se verificando ligações entre as componentes conceptual e processual. Com efeito, a aluna recorre preferencialmente à utilização de processos sobre os objectos, sendo estes maioritariamente elementares e baseados em procedimentos automatizados. Muitas das vezes, a Cristiana parece até nem possuir uma visão abrangente dos processos envolvidos, apenas referindo-se a procedimentos isolados. Este facto pode ser facilmente identificado na maioria das suas abordagens às questões colocadas, como ocorre nos seguintes casos: "Fazia-se ... Aquele do... (...) Nós damos o T e depois..." na questão 2 da segunda entrevista; "Não é para pôr o 5 aqui no... Porque senão era muito fácil" ou ainda "Ah! Fazemos o 15 vezes 2...eh... depois t...", ambas na questão 3 da segunda entrevista. De assinalar, no entanto e para concluir, o rigor exibido pela Cristiana na apresentação de procedimentos, denotando o cuidado que, apesar das suas dificuldades, a aluna coloca na sua aprendizagem.

Rita

Em alguns momentos, a Rita apresenta distintos níveis de conceitos imagem. Com efeito, na primeira entrevista a aluna encontra-se maioritariamente num nível incipiente, enquanto na segunda entrevista a Rita evidencia duas fases algo distintas, uma conectada com um nível instrumental e relacional, no início da entrevista (discussão das afirmações da questão 1), e outro conectado com um nível instrumental e incipiente (respostas às restantes questões). Assim e na primeira entrevista, embora a Rita tenha já conseguido utilizar alguns objectos que se encontravam na base dos conceitos abordados, como a interpretação geométrica do conceito de derivada num ponto (questão 5), os processos utilizados ainda assentam maioritariamente em procedimentos algébricos, como ocorreu na análise da t.m.v. na questão 1. Simultaneamente, a Rita evidenciou algumas dificuldades em estabelecer relações entre objectos matemáticos mais complexos e em utilizar processos não elementares, como se verificou pela sua incapacidade em aplicar o método de determinação de tangentes em situações algo dúbias e ainda não exploradas (questões 3 e 4). A Rita parece ainda ter utilizado algumas propriedades com compreensão, ao relacionar correctamente os conceitos de t.m.v. e de monotonia na questão 2, mas evidencia dificuldades nas respectivas traduções simbólicas, ao não ser capaz de apresentar provas matemáticas consistentes.

Na segunda entrevista, a Rita começa por evidenciar características de um conceito imagem relacional ao revelar entender os conceitos como objectos matemáticos com existência própria para além dos processos presentes na sua construção, como se verificou no manuseamento dos conceitos de t.m.v., de monotonia, de taxa de variação e de tangente, nas questões 1A a 1C. No entanto, a aluna efectuou as traduções entre representações de um modo operacional, que embora parecessem assentar em procedimentos interiorizados, revelaram dificuldades nas respectivas traduções simbólicas, denotando um conceito imagem mais instrumental. Com o avançar da entrevista, a Rita começou a evidenciar maiores dificuldades, revelando conceitos imagem muito incompletos como o de interpretação geométrica de derivada, na questão 2, e, sobretudo, os de valores de função e de função derivada num ponto, de t.m.v. e de taxa de variação instantânea, na questão 3. Na resolução da questão 2, a Rita pareceu verbalizar propriedades com alguma compreensão, mas os conceitos imagem da maioria dos objectos que referiu é elementar e os processos sobre eles realizados revelaram muita falta de coordenação. A aluna apresentou igualmente na questão 3 muitas dificuldades na tradução entre representações, baseando-a em procedimentos elementares, não coordenados de forma adequada, não potenciando a compreensão dos conceitos envolvidos. Nesta questão, verificou-se uma utilização parcial de proceitos, destacando apenas a sua componente processual, baseada, na maior parte das vezes, na automatização de procedimentos. Este conceito imagem essencialmente incipiente manifestado pela Rita na questão 3 deu novamente lugar a um conceito imagem mais instrumental na quarta e última questão da entrevista. Com efeito, e apesar de ainda revelar algumas dificuldades na utilização de alguns objectos como o de tangente e na coordenação de processos para a construção de novos objectos, como no caso da determinação da função derivada de uma função constante, a aluna conseguiu utilizar com destreza alguns objectos mais complexos, como os que estão na base do conceito de função derivada. No mesmo sentido, a aluna evidenciou traduções entre representações baseadas em procedimentos interiorizados.

João

O João revelou ser um caso paradoxal, no que diz respeito aos níveis de conceitos imagem manifestados. Com efeito, o aluno pareceu revelar um padrão em tudo concordante com o seu perfil, com potencial para níveis de conceitos imagem elevados, porém com um défice acentuado no empenho e no estudo. Sempre que os conceitos matemáticos, assim como os objectos e processos a eles associados, revelam alguma falta de exploração ou um certo esquecimento potenciado pelo tempo decorrido sobre o seu manuseamento, o João revelou conceitos imagem claramente incipientes, como se verificou, respectivamente, com os conceitos de tangente a uma curva e de derivada num ponto (questões 3, 4 e 5 na primeira entrevista) e com os conceitos de t.m.v. e de taxa de variação (questões 1A e 1C na segunda entrevista). Uma vez recordados os conceitos, quer pelo auxílio da investigadora, quer pelo decurso natural da entrevista, que promove uma exploração sequencial dos conceitos, o João, como que munido de um interruptor interno, passa a evidenciar um conceito imagem essencialmente relacional. Assim, dos conceitos imagem muito incompletos, da referência apenas a objectos e propriedades elementares e da dificuldade em estabelecer relações entre eles, o João transita para um nível em que os conceitos passam a ser entendidos como objectos matemáticos com existência própria, em que passa a se possível lidar com uma grande variedade de processos, de forma coordenada e potenciadora da construção de novos objectos. Adicionalmente, as propriedades passam a ser utilizadas com compreensão, representando objectos matemáticos (como disso é exemplo a relação entre a derivada e o declive da recta tangente no exercício 2 da segunda entrevista) e os conceitos começaram a ser entendidos como proceitos, como ocorre com o conceito de t.m.v na questão 2 da primeira entrevista e com o conceito de função derivada nas questões 3 e 4 da segunda. No entanto e neste capítulo do pensamento proceptual, é importante assinalar alguma predominância da componente processual, nomeadamente no que se refere a uma predilecção pela utilização de processos geométricos e ainda a grandes lacunas evidenciadas na linguagem matemática e em traduções simbólicas.

6.3. Reflexão crítica

Esta secção é dedicada à exposição de alguns aspectos reflectidos pela investigadora ao longo do trabalho, considerados pertinentes no contexto de formação de docentes de matemática em que este se inseriu.

Esta investigação constituiu uma experiência muito útil e interessante quer para a investigadora, quer para os alunos que nela participaram. Com efeito e para os alunos, este trabalho não só lhes proporcionou uma oportunidade de se relacionar de forma mais aprofundada com a Matemática, como também resultou num meio de aferição da aquisição e evolução das próprias aprendizagens. De referir, por exemplo o entusiasmo com que estes participaram na primeira entrevista, envolvendo-se com os conceitos explorados, falando e pensando matemática, sempre na procura das soluções pretendidas. Do ponto de vista da investigadora, o trabalho constituiu um importante instrumento de sensibilização para os complexos contornos dos processos de ensino-aprendizagem. Com efeito e apesar de já se considerar uma pessoa motivada e interessada nestes aspectos, a investigadora reconhece a importância inquestionável deste trabalho no despertar para abordagens mais consistentes e sistemáticas.

Reflectindo sobre a intervenção didáctica e sobre a sua relação com as aprendizagens evidenciadas pelos alunos, será importante assinalar alguns aspectos que pareceram assumir alguma relevância e que deverão ser considerados em experiências pedagógicas futuras. Assim e na primeira aula leccionada, a investigadora caiu na tentação de insistir na leccionação dos conteúdos programados, mesmo que para isso o tempo lectivo tivesse de ser artificialmente prolongado. Esta insistência ficou a dever-se não só a alguma inexperiência profissional (reflectida no desejo de não interromper a sequência dos conteúdos a abordar) como também ao facto de já se encontrar preparado o guião da primeira entrevista, a ser apresentado aos alunos nesse mesmo dia e a incidir sobre todos os conceitos programados. No entanto, esta insistência acabou por se revelar prejudicial às aprendizagens dos alunos, uma vez que estes já se encontravam "cansados" para conseguirem assimilar os conceitos, tanto devido à duração temporal da aula, como à extensão dos conteúdos nela previamente abordados.

Outra questão sobre a qual é importante reflectir prende-se com a forma como os conceitos foram explorados nas aulas, baseada sobretudo em percursos do global e intuitivo para o abstracto e formal. Desta forma e apoiada na opinião de vários autores, a investigadora pretendia promover uma compreensão consistente e significativa dos objectos matemáticos subjacentes, tendo, no entanto, esta abordagem se revelado prejudicial à compreensão e utilização de uma matemática rigorosa e formal por parte dos alunos. Por outro lado, levanta-se inevitavelmente a questão: seriam os alunos capazes de manusear com destreza quer as definições formais, quer os objectos matemáticos subjacentes, se o percurso de ensino-aprendizagem tivesse sido o inverso? A questão é pertinente e creio que poderá ser alvo de investigações futuras. Por agora, a investigadora poderá apenas reflectir na existência de alguma validade da abordagem realizada, considerando que os alunos se encontravam no 11º ano de escolaridade, em que o tema das derivadas é introduzido de uma forma algo introdutória e motivadora para uma abordagem mais formal e completa a efectuar no ano seguinte.

Uma das lacunas verificadas consistiu no pouco tempo que acabou por ser dedicado à exploração dos conceitos. Com efeito, alguns compromissos de calendário, como a realização do teste nacional intermédio do GAVE e o processo de avaliação envolvendo a docente orientadora do estágio, acabaram por condicionar tanto a forma, como o tempo dedicado aos conceitos trabalhados. A investigadora possui a forte convicção de que teria sido possível observar aprendizagens mais consistentes, se tivesse havido oportunidade para melhor as preparar e consolidar. Com efeito a investigadora acredita, tal como Sfard (citada em Domingos 2003), que o tempo é um dos factores fundamentais na obtenção de sucesso em aprendizagens matemáticas, pois alguns objectos desta área científica podem necessitar de um longo período de incubação, antes de conseguirem "revelar-se" aos alunos. Exemplo da importância deste factor é a evolução verificada nas aprendizagens entre a primeira e a segunda entrevista, no que se refere à maioria dos conceitos matemáticos nelas abordados.

Existe outros dois factores, não tão facilmente controláveis pelo professor, que também poderão ter influenciado as aprendizagens demonstradas e para os quais um docente de matemática deve estar igualmente atento. Um deles consiste na necessidade que por vezes os alunos parecem sentir de "esquecer" e deixar para trás conteúdos previamente trabalhados e testados, tentando concentrar toda a sua atenção nos temas em estudo no momento. Com efeito e aquando da realização da segunda entrevista, os conteúdos respeitantes a este estudo haviam já sido explorados e testados formalmente e os alunos já se encontravam a trabalhar conteúdos distintos (sucessões), podendo esta circunstância ter influenciado, de alguma forma as suas prestações. O segundo factor diz respeito a condições psicológicas dos alunos. Por exemplo e ao realizar a segunda entrevista à Rita, a investigadora, ao tentar incentivá-la e transmitir-lhe confiança, elogiou a seu desempenho inicial. A partir de então (final da resposta à questão 1), a aluna pareceu acusar a responsabilidade de continuar a apresentar um desempenho positivo, com esta preocupação a parecer condicionar a sua confiança e estar na origem da diminuição do nível de conceitos imagem manifestado pela aluna, conforme descrito na secção anterior.

Por último, é importante referir o considerável papel da motivação e do empenho dos alunos na sua própria aprendizagem. Atendendo, por exemplo, às prestações dos dois alunos conectados com níveis de conceitos imagem mais distantes, a Cristiana (nível mais elementar) e o João (nível mais avançado), podemos facilmente verificar que, apesar das suas dificuldades, a Cristiana apresenta um maior cuidado e atenção na utilização de traduções matemáticas rigorosas, o que poderá constituir, muito provavelmente, uma importante base para a sua evolução nesta área científica. Por seu lado, o João ao não se empenhar seriamente na sua aprendizagem, acaba por não aproveitar todas as suas potencialidades, prejudicando claramente o seu desempenho. A escolha deste aluno para participar no estudo, teve que ver não só com o facto de ele ser um bom informante, mas sobretudo com a sua grande facilidade e naturalidade para o raciocínio matemático, provavelmente a maior verificada na turma. No entanto, a investigação poderia provavelmente ter ficado mais enriquecida pela participação de algum outro aluno, por exemplo de entre um conjunto de três, que nas aulas revelaram possuir um grande à-vontade com os conceitos trabalhados.

Uma ideia importante a reter deste trabalho e a considerar com muita atenção numa actividade docente futura poderá ser, em boa aproximação, resumida na seguinte frase presente no Programa de Matemática do Ensino Básico (pág. 8): "A aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelos alunos e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor".

Bibliografia

Bingolbali, E. & Monaghan, J. (2008). The concept image revisited. *Educational Studies in Mathematics,* 68, 19-35.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Rubacher, J. W., Case, C. W., & Reagan, T. G. (1994). Becoming a reflective educator: How to build a culture of inquiry in the schools. *Thousand Oaks,* CA: Corwin.

Clement, J. (1989). The concept of variation and misconceptions in Cartesian graphing. *Focus on Learning Problem in Mathematics,* 11(2), 77-87.

Cobb, P. e Steffe, L. P. (1983). The construtivist researcher as teacher and model builder. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*(2), 83-94.

Crawford, K. & Adler, J. (1996). Teacher as researchers in mathematics education. In A.J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Orgs.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A Matemática no início do superior*. Tese de Doutoramento apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações*. Tese de Mestrado apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. Em P. Nesher e J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis* ***by*** *the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 113- 134). Cambridge: University Press.

Ferrini-Mundi, J. e Lauten, D. (1993). Teaching and leaning Calculus. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 155-176). Nova Iorque: Macmillan.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations - Studies and teaching experiments*. Tese de Doutoramento apresentada na Université du Québéc.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. Em L. Hatfield (Ed.), *Mathematic problem solving* (pp. 43-52). Columbus, Ohio: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kemmis, S. (1985). Action research and the politics of reflection. In D. Boud, R. Keogh, & D. Walker (Orgs.) *Reflexion: Turning experience into learning* (pp. 139-163). London: Kogan Page.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. e Stein, M. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research, 60* (1), 1-64.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME

NCTM (2000). *Princípios e Normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM**.**

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics,* 14, 235-250.

Ponte, J. P. (org.), (1991). O computador na Educação Matemática. *Cadernos de Educação Matemática, nº 2*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M. & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J.P. da (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI, *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: Associação de professores de Matemática.

Schön, D. (1987). *Educating the reflective practioner*. São Francisco, CA: Jossey-Bass.

Selden, A. e Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function: Summary and overview. Em G. Harel e E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 1-21). Washington: Mathematical Association of America.

Serrazina, L & Oliveira, I (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI, *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: Associação de professores de Matemática.

Stenhouse, L. A. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. London:Heineman Educational.

Tall, D. (1994). The psychology of advanced mathematical thinking. Em D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.

Ventura, L. (1997). Processos de Aprendizagem do Conceito de Derivada em Contextos Computacionais. Tese de Mestrado apresentada na Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. Em T. Eisenberg e T. Dreyfus (Eds.), *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 11(2), 149-156.

Vinner, S. e Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, 356-366.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. Em D.Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

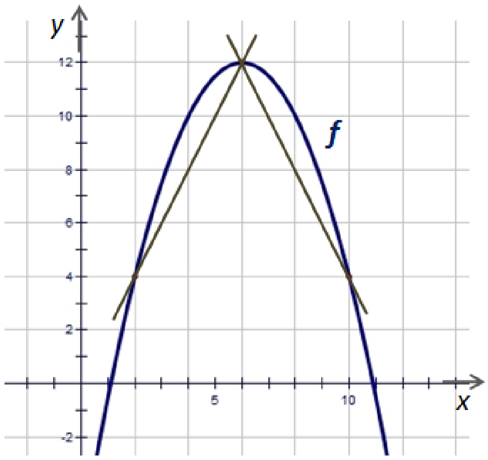
Viseu, F. & Almeida, C. (2003). Interpretação gráfica do conceito de recta tangente a uma curva num ponto por professores estagiários. *Revista Portuguesa de Educação*, 2003, 16 (2), (pp. 197-220).

Wagner S. e Parker, S. (1993). Advanced algebra. Em P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics,* (pp. 119-139). Nova Iorque: Macmillan.

Anexos

Anexo 1 – Situações colocadas na 1.ª entrevista

1. *Na figura encontra-se representada parte do gráfico de uma função f e parte de duas rectas secantes ao gráfico de f, que passam pelos pontos assinalados.*



Indique se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa:

A taxa média de variação da função nos intervalos [2, 6] e [6, 10] é igual.

Justifique.

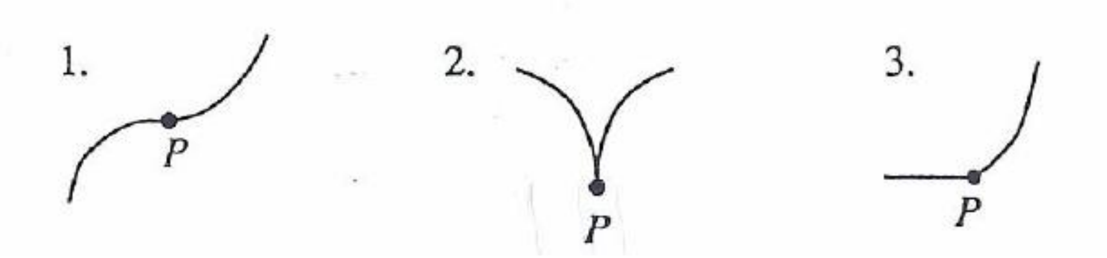
2. *Comente as seguintes afirmações quanto à sua veracidade:*

   A. Se uma função é crescente num certo intervalo do seu domínio, a taxa média de variação nesse intervalo é positiva.

   B. Se a taxa média de variação de uma função num certo intervalo do seu domínio é positiva, a função é crescente nesse intervalo.

Apresente todos os elementos que julgue necessários para explicar o seu raciocínio:

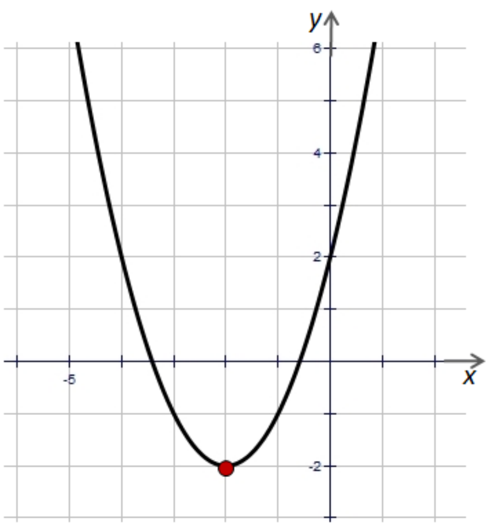
3. *As três figuras abaixo representam partes dos gráficos de diferentes funções.*

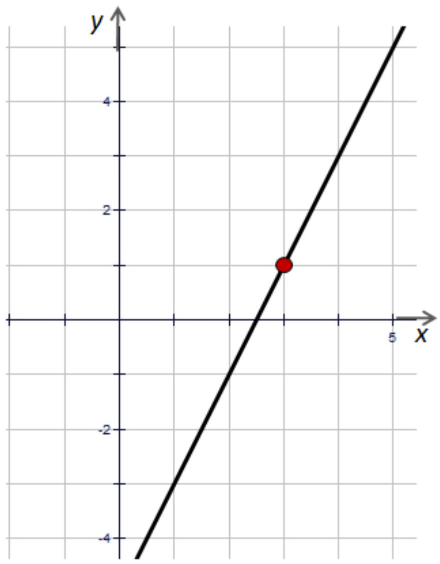


3.1. *Indique, para cada caso, quantas rectas tangentes a esses gráficos é possível traçar pelo ponto P. Nenhuma? Uma? Duas? Três? Infinitas?*

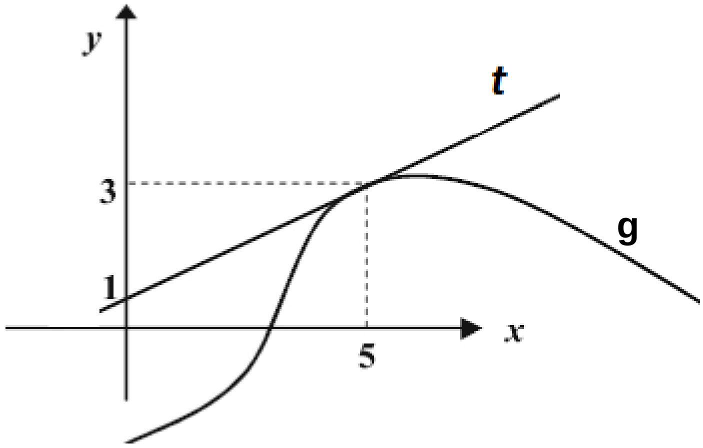
3.2. *No caso de existirem, represente essas rectas tangentes sobre a respectiva figura.*

4. *Determine o valor da derivada de cada uma das seguintes funções nos pontos assinalados.*





5. *Na figura abaixo encontra-se representada parte do gráfico de uma função* g *e uma recta* t. *A recta é tangente ao gráfico de* g *no ponto de coordenadas (5, 3) e intersecta o eixo dos yy no ponto de ordenada 1.*



Qual o valor de g'(5)*?*

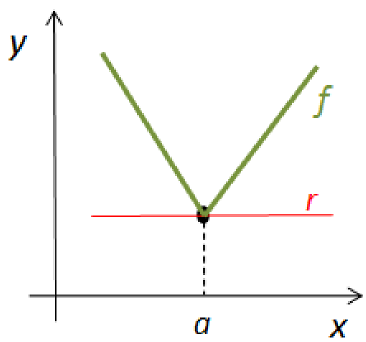
Anexo 2 – Situações colocadas na 2.ª entrevista

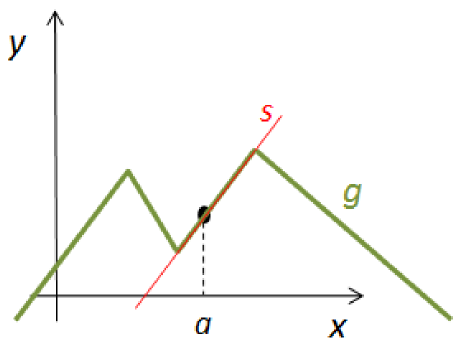
1. O que pode dizer acerca das seguintes afirmações:

   A. Se a taxa média de variação de uma função no intervalo [1, 8] é 4, a taxa de variação para x=3 tem de ser positiva.

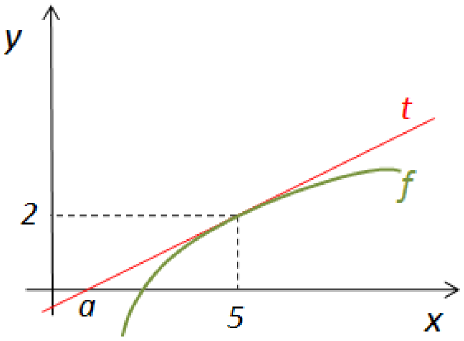
   B. Uma função pode ser monótona crescente e ter taxa média de variação negativa num dado intervalo.

   C. As rectas r e s são, respectivamente, rectas tangentes aos gráficos de f e g no ponto de abcissa a:





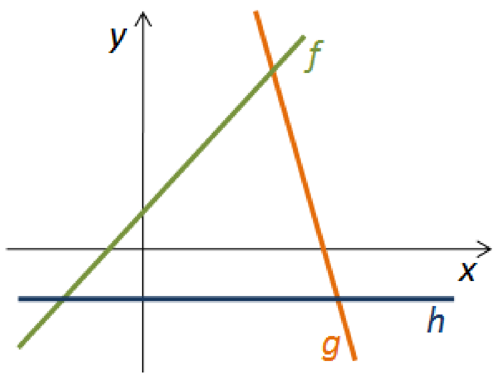
2. A recta t é tangente ao gráfico de f no ponto A(5, 2). Se $f'(5) = \frac{1}{2}$, determine a.



3. O número de pessoas, P, afectadas t dias após eclodir uma epidemia é dado pela fórmula $P(t) = 15t^2 - t^3$, 0 < t < 15.

   Determine a taxa de variação de P para: t=5 e t=11. Interprete os resultados.

4. Considere as funções f, g e h representadas graficamente num referencial monométrico e propõe gráficos para as funções f', g' e h':



Anexo 3 – Fichas de suporte à componente lectiva

Matemática A - 11º Ano
Ficha de Trabalho Nº 32 A

1. Numa experiência de laboratório que durou 10 dias, a massa de uma planta aquática evoluiu de acordo com a função $M(t) = t^3 - 17t^2 + 86t + 50$, onde M representa a massa em gramas e t o tempo decorrido em dias.

1.1. Qual foi a variação da massa da planta entre o início da experiência e o final do 3º dia? E qual foi a variação média da massa nesse período de tempo?

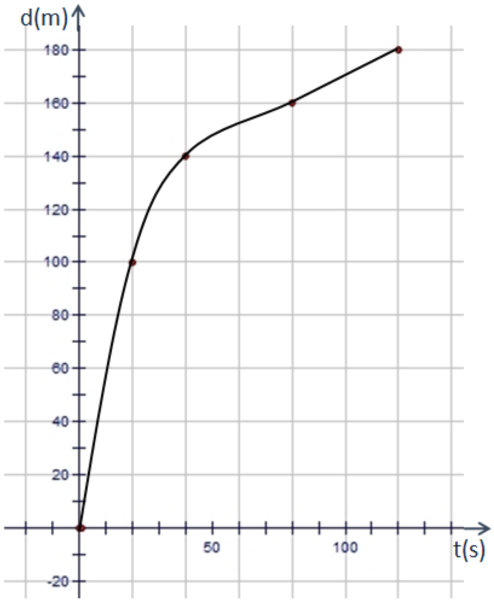
1.2. Qual foi a taxa média de variação entre os finais do 2º e do 5º dias (intervalo [2, 5])?

1.3. Qual foi a taxa média de variação no intervalo [3, 8]? E no intervalo [2, 7]? Qual o significado destas taxas?

2.

Um grupo de alunos da Escola Secundária Fernando Lopes Graça efectuou uma experiência no âmbito da disciplina de Física ou Química, que consistia em um aluno percorrer uma determinada distância, anotando a sua posição em determinados instantes.

Com os dados relativos ao movimento do João, que se deslocou entre os pontos A e B da rua em frente à escola (conforme a figura), o grupo construiu o gráfico representado abaixo, onde ***d*** (em metros) representa a distância ao ponto A e ***t*** (em segundos) o tempo decorrido desde o início do movimento.



2.1. Verifique que a velocidade média com que o João efectua todo o percurso é de 1,5 m/s.

2.2. Determine o valor da velocidade média do João nos intervalos:

2.2.1. [0, 20];
2.2.2. [20, 40];
2.2.3. [40, 80];
2.2.4. [80, 120];

2.3. Qual a velocidade com que o João passa pelo extremo Sul do Pavilhão F (velocidade no instante t = 40 s)? Determine um valor o mais aproximado possível.

Para responder a esta questão, atenda às tabelas da esquerda, que contêm alguns dos dados trabalhados pelos alunos e complete as tabelas da direita.

Tempo (s)	Distância ao ponto A (m)
50	147,80
45	144,00
41	140,85
40,6	140,53

Intervalo	Δt (s)	Velocidade média no intervalo (m/s)
[40; 50]	10	
[40; 45]		
[40; 41]		
[40; 40,6]		

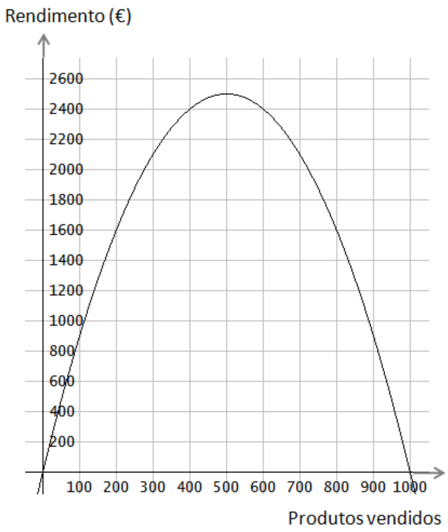
Tempo (s)	Distância ao ponto A (m)
30	127,00
35	134,50
39	139,02
39,5	139,54

Intervalo	Δt (s)	Velocidade média no intervalo (m/s)
[30; 40]		
[35; 40]		
[39; 40]		
[39,5; 40]		

3. Para a empresa X, o rendimento R (em euros) da venda de x unidades é dado por:

$$R(x) = 10x - 0{,}01x^2 \quad , \quad 0 < x < 1000$$

A função está representada graficamente na figura abaixo.



Preencha os quadros que se seguem e estime a taxa de variação instantânea do rendimento quando a empresa vende 200 unidades.

h	**Intervalo [200+h; 200]**	**Taxa média de variação no intervalo [200+h; 200]**
- 0,1		
- 0,01		
- 0,001		

0

0,001		
0,01		
0,1		
h	**Intervalo [200; 200+h]**	**Taxa média de variação no intervalo [200; 200+h]**

Matemática A - 11º Ano

Ficha de Trabalho Nº 15

Derivada de uma função num ponto

The Geometer's Sketchpad

Utilize o programa *The Geometer's Sketchpad* para a realização da actividade proposta.

> Considere a função real de variável real f cujas imagens são obtidas pela expressão $f(x) = 3x - \frac{1}{2}x^2$.
>
> Determine o valor da derivada da função f no ponto de abcissa 2.

Siga os seguintes passos:

1. Entre no programa e defina um sistema de coordenadas.

2. "Esconda" os pontos que assinalam a origem do referencial e a unidade: seleccione, independentemente, cada um deles com o botão do lado direito e escolha a opção *Hide Origin Point* e *Hide Unit Point*, respectivamente.

3. Represente graficamente a função *f*.

> Pretende determinar-se
>
> $$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$
>
> ou
>
> $$\lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h}$$

4. Introduza os pontos de coordenadas (*2, f(2)*), (*2, 0*) e (0, *f(2)*), [respectivamente, a projecção do ponto (*2, f(2)*) sobre o eixo dos *xx* e sobre o eixo dos *yy*] através da opção *Graph* > *Plot Points...*

5. Coloque a etiqueta ***A*** no ponto (*2, f(2)*).

6. Construa um ponto ***P*** sobre a função:
   6.1. Seleccione a função;
   6.2. Utilize a opção *Construct* > *Point On Function Plot*
   6.3. Coloque a etiqueta ***P*** no ponto construído.

7. Determine a projecção do ponto ***P*** sobre o eixo dos *xx*:
   7.1. Seleccione o ponto ***P*** e o eixo dos *xx*;
   7.2. Utilize a opção *Construct* > *Perpendicular Line* para traçar uma recta que contém ***P*** e é perpendicular ao eixo dos *xx*;
   7.3. Seleccione a recta traçada e recta de equação *y =0*;
   7.4. Determine a intersecção entre as duas rectas, utilizando a opção *Construct >Intersection*;
   7.5. "Esconda" a recta traçada, seleccionando-a com o botão direito do rato e escolhendo a opção *Hide Perpendicular Line*;

8. Determine a projecção do ponto ***P*** sobre o eixo dos *yy*, procedendo de forma idêntica à descrita no ponto 7.

9. Construa um segmento de recta entre os pontos $(x_A, 0)$ e $(x_P, 0)$:
   9.1. Seleccione os pontos pretendidos;
   9.2. Utilize a opção *Construct* > *Segment*;
   9.3. Altere a cor e a espessura do segmento, de forma a este ficar facilmente visível.

10. Construa um segmento de recta entre os pontos $(0, y_A)$ e $(0, y_P)$. Proceda de forma análoga à descrita no ponto 9.

11. Determine a diferença entre as abcissas dos pontos ***P*** e ***A*** (o comprimento $\Delta x = x_P - x_A$ do segmento de recta representado sobre o eixo dos *xx*):
    11.1. Seleccione o ponto ***A***;

11.2. Insira uma caixa de texto com o valor da sua abcissa, utilizando a opção *Measure > Abscissa (x)*;

11.3. Repita o procedimento para o ponto ***P***;

11.4. Seleccione a opção *Measure > Calculate*, na caixa de texto que surge, escrever $x_P - x_A$, seleccionando as caixas de texto respectivas;

11.5. Colocar a nova caixa de texto junto ao segmento de recta sobre o eixo dos *xx*.

12. Determine a diferença entre as ordenadas dos pontos ***P*** e ***A*** (o comprimento $\Delta y = y_P - y_A$ do segmento de recta representado sobre o eixo dos *yy*), de forma análoga à descrita no ponto 11.

13. Construa a recta que contém os pontos ***A*** e ***P***.

14. Determine o declive da recta traçada:

14.1. Seleccione a recta;

14.2. Utilize a opção *Measure > Slope*

15. Faça deslocar o ponto ***P*** sobre o gráfico da função, pressionando-o com o botão esquerdo do rato, e observe a variação das quantidades:

- Δy;
- Δx;
- Declive da recta secante ao gráfico da função.

16. **Determine o valor da derivada da função *f* no ponto de abcissa 2.**

Repita o procedimento descrito para **determinar o valor da derivada da função *g* no ponto de abcissa -1**, sendo *g* definida por:

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x^3 + x^2 - 6x$$

Determinação da expressão analítica da função derivada da função *f* definida por $f(x) = x^3$

Comecemos por determinar a derivada da função *f* no ponto $x = x_0$ do seu domínio (ponto genérico), como o limite da razão incremental de f em $x = x_0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^3-(x_0)^3}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{x_0{}^3+3hx_0{}^2+3h^2x_0+h^3-x_0{}^3}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{3hx_0{}^2+3h^2x_0+h^3}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{h(3x_0{}^2+3hx_0+h^2)}{h} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = \lim_{h\to 0}(3x_0{}^2 + 3hx_0 + h^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = 3x_0{}^2 + 0 + 0$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0) = 3x_0{}^2$$

Como os cálculos efectuados são válidos para qualquer ponto genérico x_0, conclui-se que $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$**.**

Matemática A - 11º Ano

Ficha de Recuperação Nº 11

1. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = 7x^2$.

   a) Determine a função derivada da função *f*.

   b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 3.

2. Seja *g* a função real de variável real definida por $g(x) = -5x^2 - 2x + 3$.

   a) Determine $g'(1)$.

   b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa 1.

Anexo 4 – Exercícios propostos para resolução extra-aula.

Exercícios propostos na aula de Quinta, 23 de Abril de 2009

1. Numa certa função *f*, sabemos que $f(5) = 8$ e que $Tmv_{[5;\ 12]} = 3$.

   Qual o valor de $f(12)$?

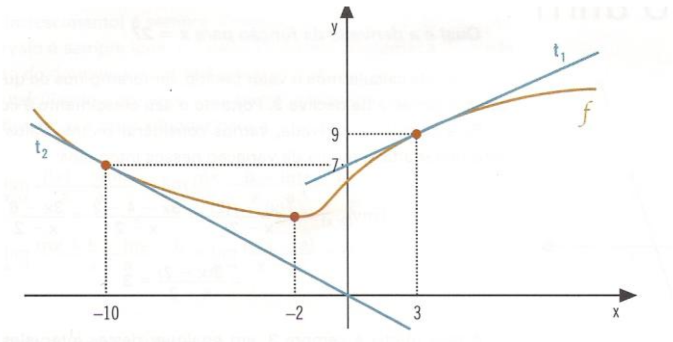
2. Considera a função $g(x) = -x^2 + 9x - 8$. Calcula a taxa média de variação nos seguintes intervalos:

   a. $[-1;\ 5]$.
   b. $[0;\ 20]$.
   c. $[3;\ 8]$.
   d. $[3; 3{,}1]$.
   e. Indica um intervalo onde a taxa média de variação seja nula.

3. Indica, justificando, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

   a. "Se uma função é crescente num certo intervalo do seu domínio, a taxa média de variação nesse intervalo é positiva."
   b. "Se a taxa média de variação de uma função num certo intervalo do seu domínio é negativa, a função é decrescente nesse intervalo."
   c. "É constante a taxa média de variação de uma função linear em qualquer intervalo do seu domínio."
   d. "Se uma função definida em $\mathbb{R}$ não é injectiva, é possível encontrar um intervalo do seu domínio em que a taxa média de variação é nula."

4. Temos aqui o gráfico de uma função *f*. As rectas t_1 e t_2 são tangentes ao gráfico nos pontos indicados.



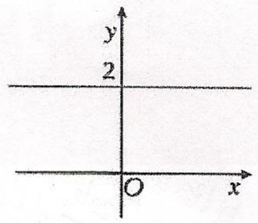
   a. Calcula a taxa média de variação no intervalo [-10; 3].
   b. Indica um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa.
   c. Qual é a taxa de variação da função para *x*=3?
   d. Determina *f'*(-10).
   e. Para *x* = -5 a derivada é positiva ou negativa? E para *x* = 0?
   f. Qual destes valores é maior: *f'*(3) ou *f'*(5)? Porquê?
   g. Qual é a equação da recta t_1?
   h. Qual é a equação da recta t_1?

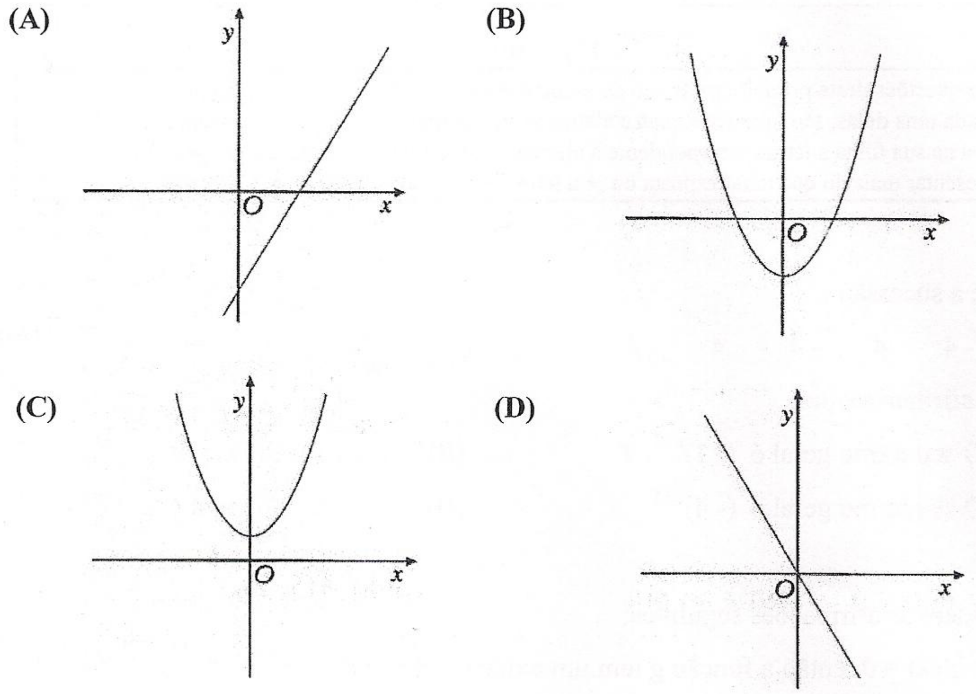
Anexo 5 – Exercícios de ficha de avaliação

1.

Na figura ao lado está representado o gráfico da função g´, derivada da função g.

Uma representação gráfica da função g, pode ser:





2. O número de pessoas, P, infectadas passados t dias após aparecer uma determinada virose é dado pela função:

$$P(t) = 15t^2 - t^3 \ , \ \ 0 \leq t \leq 15$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos (ou seja, **sem** utilização da calculadora), responda à seguinte questão:

Qual a velocidade de propagação da virose quando t=4?